А. Н. Смоляков, В. И. Сидельников

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ: ЗАДАНИЯ ГРУППЫ С

МОСКВА 2013

А. Н. Смоляков, В. И. Сидельников

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ: ЗАДАНИЯ ГРУППЫ С

ТЕОРИЯ, РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ

Учебное пособие

Москва • 2013

УДК 51:37.02
ББК 22:74.262.21
С51

Рецензенты:

Черноусенко Т. И. – канд. пед. наук, доцент кафедры математических дисциплин, информационных технологий и дистанционного обучения СКИРО, ПК и ПРО;

Стибунова С. И. – учитель математики высшей категории МБОУ гимназии №9 г. Ставрополь

Под редакцией
заслуженного учителя России *Смолякова А. Н.*

Смоляков, А. Н.

С51 ЕГЭ по математике: задания группы С. Теория, решения, ответы : учебное пособие / А. Н. Смоляков, В. И. Сидельников ; под ред. А. Н. Смолякова. – М. : Илекса, 2013. – 140 с.

ISBN 978-5-89237-568-9

При подготовке к Единому государственному экзамену по математике особое внимание следует уделять заданиям группы С. Решение именно этих заданий является условием получения высоких баллов на ЕГЭ.

Пособие содержит типовые задания по темам, соответствующим уровню С1–С6. Кратко излагается теоретический материал, приводятся необходимые формулы, рассматриваются решения наиболее типичных заданий несколькими способами, предлагаются упражнения (с ответами) для самостоятельного решения.

Большинство заданий авторские, некоторые взяты из диагностических и экзаменационных работ 2011–2012 годов.

Адресовано учителям математики и учащимся 10–11 классов.

УДК 51:37.02
ББК 22:74.262.21

ISBN 978-5-89237-568-9

ВВЕДЕНИЕ

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике включает в себя задания группы В (обязательный минимум) и группы С (задания повышенной сложности).

В пособии Вы найдете: основной теоретический материал по экзаменационным темам; разбор заданий-прототипов **группы С**, которые предлагаются **Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ)**, в том числе заданий с несколькими вариантами решения; задания для самоконтроля с решениями и ответами.

Задания располагаются по разделам в соответствии с темами, традиционно предлагавшимися на ЕГЭ по математике:

С1 – решение тригонометрических уравнений, систем уравнений с элементами отбора корней.

С2 – геометрические задания стереометрии:

– расстояние от точки до прямой;

– расстояние от точки до плоскости;

– расстояние между скрещивающимися прямыми;

– угол между прямой и плоскостью;

– угол между плоскостями;

– угол между скрещивающимися прямыми.

С3 – показательные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.

С4 – геометрические задачи по планиметрии, где возможен не один вариант решений.

С5 – задания на решение уравнений и неравенств с параметрами.

С6 – задания, для решения которых используются нестандартные подходы с элементами логики.

С помощью данного пособия Вы сможете успешно подготовиться к экзамену, а приобретенные знания, умения и навыки востребуются при продолжении образования.

Задания уровня С1.
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1.1. Формулы тригонометрии

При решении тригонометрических уравнений полезно знать следующие формулы:

1. Формулы, выражающие зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$;

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$; $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$;

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

$\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$; $\cos\alpha = \mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$ (при всех допустимых α).

2. Формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$;

$(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \alpha \pm \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m;\ k, n, m \in Z)$.

3. Формулы двойного и половинного аргумента:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$; $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}m, m \in Z$.

4. Формулы понижения степени:

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

5. Формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение:

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$;

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$;

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

7. Формулы приведения:

а) при переходе от функций углов $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функциям угла α – название функции изменяется: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

при переходе от углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям угла α – название функции сохраняется;

б) если α – острый угол (т.е. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставится тот знак, какой имеет приводимая функция.

8. Формулы для нахождения корней тригонометрических уравнений.

Уравнение $\sin x = a$ имеет решение, если $|a| \leq 1$. Формула нахождения корней: $\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

Полезно помнить, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $0 \leq a \leq 1$.

Частные случаи решения тригонометрических уравнений:

$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

$\sin x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$

Уравнение $\cos x = a$ имеет решение, если $|a| \leq 1$. Формула нахождения корней: $\cos x = a,\ x = \pm\arccos a + 2\pi m,\ m \in Z.$

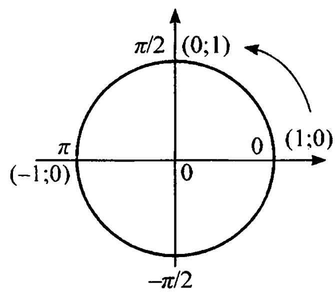
Замечание: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ 0 \leq a \leq 1.$

$\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$

$\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$

В применении частных случаев решения уравнений поможет окружность единичного радиуса.



Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a, то есть $a \in R$.

Формула для нахождения корней имеет вид: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$

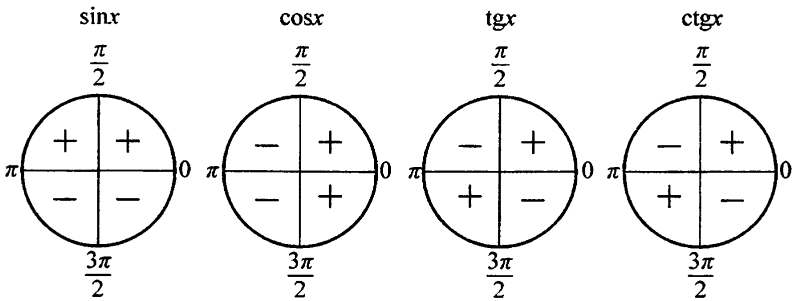
Замечание: $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,\ a \geq 0.$

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a, то есть $a \in R$.

Формула для нахождения корней имеет вид: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$

Замечание: $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,\ a \geq 0.$

При решении тригонометрических уравнений необходимо знать расположение знаков значений тригонометрических функций в четвертях окружности единичного радиуса.



1.2. Типичные задания уровня С1[1]

Пример 1. Решите уравнение $(2\cos^2 x + \cos x - 1)\sqrt{-\sin x} = 0$.

Решение: Прежде всего, заметим, что $-\sin x \geq 0$, а $\sin x \leq 0$.

Уравнение распадается на систему $\begin{cases} 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \\ \sin x \leq 0; \end{cases}$

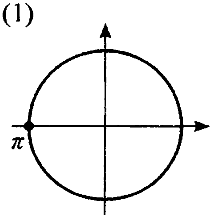
и уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = \pi n,\ n \in Z$.

Найдем $\cos x$ из первого уравнения системы: $\cos x = -1$ и $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

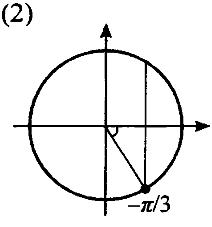
Имеем две системы $\begin{cases} \sin x \leq 0, \\ \cos x = -1; \end{cases}$ (1) $\begin{cases} \sin x \leq 0, \\ \cos x = 1/2. \end{cases}$ (2)

Далее удобно использовать окружность единичного радиуса.

(1)



(2)



$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pi n,\ n \in Z;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

[1] В данный раздел включены задания ЕГЭ прошлых лет.

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos y = 0,\\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0.\end{cases}$$

Решение. Область допустимых значений для x задается неравенством $\sin x \geq 0$. Первое уравнение системы распадается на два уравнения: $\sin x = 0$ или $\cos y = 0$.

Пусть $\sin x = 0$, тогда второе уравнение системы примет вид $\cos 2y = -2$, которое решений не имеет.

Далее, пусть $\cos y = 0$, при этом $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = -1$ и второе уравнение системы принимает вид $2\sin^2 x - 1 = 0$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (с учетом $\sin x \geq 0$). Итак, $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $y = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $((-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi m)$, $k \in Z$, $m \in Z$.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

Решение. Найдем область определения уравнения: $6x^2 - \pi x - \pi^2 \neq$ $\neq 0$, откуда $x \neq \frac{\pi}{2}$; $x \neq -\frac{\pi}{3}$.

Далее решаем уравнение $2 - 3\sin x - \cos 2x = 0$.

$2 - 3\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$,

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$, откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z;\quad x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z, m \neq 0;\quad (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

1.3. Отбор корней тригонометрических уравнений

На ЕГЭ предлагаются такие тригонометрические уравнения, где необходимо произвести отбор корней, принадлежащих промежутку или удовлетворяющих определенным условиям.

Существуют различные способы отбора корней.

Пример 1. а) Решите уравнение $\cos 2x = -1 - \sin(\frac{\pi}{2} - x)$;

б) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение. Так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, то исходное уравнение равносильно уравнению $2\cos^2 x - 1 = -1 - \cos x$, $2\cos^2 x + \cos x = 0$, $\cos x(2\cos x + 1) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Корни первого из полученных уравнений задаются формулой $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, а второго $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Укажем различные варианты решений по пункту б).

1-е решение. Функция $f(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ является монотонно возрастающей. Находим корни, принадлежащие данному промежутку:

$k = -3,\ x = -\frac{5\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$k = -2,\ x = -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$k = -1,\ x = -\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$k = 0,\ x = \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$k = 1,\ x = \frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right].$

Аналогичные рассуждения проводим для серии корней $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Для $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$ будет:

$n = -2,\ x = -\frac{10\pi}{3};\ -\frac{10\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$n = -1,\ x = -\frac{4\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$n = 0,\ x = \frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$n = 1,\ x = \frac{8\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right].$

Далее рассмотрим ситуацию для $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$:

$n = -1,\ x = -\frac{8\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$n = 0,\ x = -\frac{2\pi}{3};\ -\frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right];$

$n = 1,\ x = \frac{4\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3} \notin \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right].$

Получаем ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}.$

Приведем *второе решение* пункта б).

Пусть $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, тогда $-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le \pi,\ -\frac{3}{2} \le \frac{1}{2} + k \le 1,$

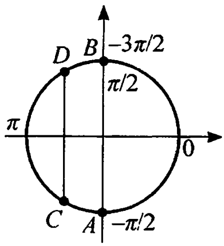
$-2 \le k \le \frac{1}{2} \Rightarrow k = -2;\ k = -1$ и $k = 0.$

После подстановки полученных значений k в уравнение $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ получим частные (уже найденные ранее) решения: $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}.$

Пусть $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$, тогда $-\frac{3\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le \pi,\ n \in Z$, откуда $n = -1$ и $n = 0$, и получаем: $-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}.$

Аналогичные рассуждения для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ дают: $-\frac{2\pi}{3},$ и получаем ответ: для б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}.$

Рассмотрим еще одно решение по пункту б), где используется окружность единичного радиуса.



Все корни серии $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ на окружности изображаются точками A и B, которым соответствуют числа $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; а корням $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ соответствуют числа $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$, изображенные точками C и D.

Пример 2. Найдите все решения уравнения $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1 + \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| \le 2$.

Решение. Так как $1 + \sin x = (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2$, то исходное уравнение равносильно уравнению $(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})(1 - (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})) = 0$, откуда $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

или $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1$, $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Рассмотрим две ситуации:

1. $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in Z,\quad x = \pi + 4\pi m,\ m \in Z.$

Сразу заметим, что корни этой серии не удовлетворяют неравенству $|x| \le 2$ ни при каком целом значении m.

2. Далее получаем еще одну серию $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in Z$, $x = 4\pi l,\ l \in Z$. Из этой серии корней только $x = 0$ удовлетворяет неравенству $|x| \le 2$.

Решим в целых числах неравенство $-2 \le -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le 2$,

$\frac{\pi}{2} - 2 \le 2\pi k \le 2 + \frac{\pi}{2}$, $\quad \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \le k \le \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}$, так как $k \in Z$, то $k = 0$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ – еще одно искомое решение данного уравнения.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; 0.

Пример 3. Решите уравнение $(\cos 2x)\sqrt{2 - x^2} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 2x = 0,\\ 2 - x^2 \ge 0\end{cases}$ и уравнению $\sqrt{2 - x^2} = 0.$

Корнями уравнения $\cos 2x = 0$ служат числа $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$

Теперь из них выберем те корни, которые удовлетворяют неравенству $2 - x^2 \ge 0$.

Простой перебор или решение неравенства $-\sqrt{2} \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \le \sqrt{2}$ в целых числах показывает, что $n = -1$ и $n = 0$, т.е. $x = \pm\frac{\pi}{4}$ – корни данного уравнения. Остается заметить, что $x = \pm\sqrt{2}$ также его корни.

Ответ: $\pm\sqrt{2};\ \pm\frac{\pi}{4}.$

Задачи для самостоятельного решения[1]**.**

Решите уравнения:

1. $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$

   Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi l,\quad \mathrm{arctg}2 + \pi n,\quad l, n \in Z.$

2. $2\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 2{,}5.$

   Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi l,\quad \mathrm{arctg}3 + \pi n,\quad l, n \in Z.$

3. $2\sin x + 3\cos x + 3 = 0.$

   Ответ: $\pi + 2\pi k,\quad -2\mathrm{arctg}1{,}5 + 2\pi n,\quad k, n \in Z.$

4. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1.$

   Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z.$

5. $\sin x - \sin 2x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$

   Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi l,\quad (-1)^k\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad l, k \in Z.$

6. $\sin 2x\cdot\cos 3x = \sin 4x\cdot\cos 5x.$

   Ответ: $\frac{\pi n}{2},\quad \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7},\quad k, n \in Z.$

---

[1] В данный раздел включены задания прототипов ЕГЭ.

7. $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad l, k \in Z.$

8. $\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\cos x} = \sin x.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad l, k \in Z.$

9. $\cos\sqrt{2 - x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Ответ: $\pm\sqrt{2 - \dfrac{\pi^2}{9}}$

10. $\sin(2\pi \cdot \cos x) = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}, \quad \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, \quad k, n \in Z.$

11. $\dfrac{(\cos x - 1)(2\sin x + 1)}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0.$

Ответ: $\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

12. $\sqrt{\sin x \cdot \cos x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 2x} + 1\right) = 0.$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{8} + \pi k, \quad k \in Z.$

13. $(\sin x - 1)(\operatorname{ctg} x + 1)\sqrt{\sin x} = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad l, k \in Z.$

14. $(\sqrt{3}\cos x - 2\cos^2 x)\log_2(-\operatorname{ctg} x) = 0.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad \dfrac{3\pi}{4} + \pi k, \quad l, k \in Z.$

15. Решите систему уравнений $\begin{cases}(2y^2 + 7y - 4)\sqrt{-\sin x} = 0,\\ \cos x - y = 0.\end{cases}$

Ответ: $\begin{cases}x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in Z,\\ y = \dfrac{1}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}x = 2\pi k,\ k \in Z,\\ y = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z,\\ y = -1.\end{cases}$

16. $(\sqrt{\sin^2 x} - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3)(2\sqrt{\cos x} - 1) = 0.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, \quad k, n \in Z.$

17. Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ \pi + 2\pi l, \quad k, l \in Z$, отрезку принадлежат корни π; $\frac{5\pi}{3}$.

18. Решите уравнение $\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) + \sin x = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi l, \ l \in Z$, отрезку принадлежит корень $\frac{7\pi}{4}$.

19. Решите уравнение $7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + \pi l, -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ l, n \in Z$, отрезку принадлежат корни $\frac{7\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + 2\pi$.

20. Решите уравнение $2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z$, отрезку принадлежат корни $\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

21. Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \cos^2 x$ и найдите корни, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ k, n \in Z$, промежутку принадлежат корни $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.

22. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}} = 0$. *Ответ:* $\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \ l \in Z$.

23. Решите уравнение $\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} = 0$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\ \ \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in Z.$

24. а) Решите уравнение $\sin 2x - \cos x + 4\sin x - 2 = 0$;

б) найдите корни, удовлетворяющие неравенству $\left|x - \frac{\pi}{6}\right| \le \pi$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z,\ \ \frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3}.$

25. Найдите корень уравнения $2 - 6\sin^2(x - \pi) - 5\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, лежащий в интервале $(2\pi; 3\pi)$.

Ответ: $\frac{7\pi}{3}.$

26. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

27. Найдите все решения уравнения $(1 + \mathrm{ctg}\, x)\sin x = 0$, принадлежащие промежутку $[-\pi; 2\pi]$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z,\ \ -\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}.$

28. Найдите все корни уравнения $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k, n \in Z.$

29. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x = 0, \\ \sqrt{2y} - \cos x = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z,\ y = \frac{1}{2}.$

30. а) Решите уравнение $\mathrm{tg}\, x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0$;

б) найдите корни уравнения, удовлетворяющие неравенству $|\cos x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\pi k,\ k \in Z,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. Неравенству удовлетворяет серия корней $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Задания уровня С2.
ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Расстояние от точки до прямой

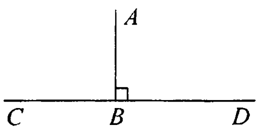


Рис. 1.

I. Расстояние от точки до прямой называется длина перпендикуляра от этой точки к прямой.
$AB \perp CD$

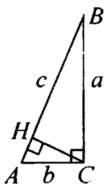


Рис. 2.

II. Расстояние от точки B до прямой AC равно a, если $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \angle C = 90°$.

III. Расстояние от точки C до прямой AB можно найти, используя соотношения ($\angle C = 90°$):
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot b; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB; \quad CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}.$$

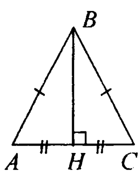


Рис. 3.

IV. Расстояние от точки B до прямой AC равно BH.
$$\left.\begin{matrix} AB = BC \\ BH \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}.$$

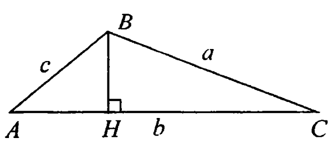


Рис. 4.

V. В ΔABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.
Найти высоту BH.
Алгоритм решения задачи:
1) по теореме косинусов найдем $\cos A$;
2) найдем $\sin A$ ($\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$);
3) $\frac{BH}{AB} = \sin A \Rightarrow BH = AB \cdot \sin A$.

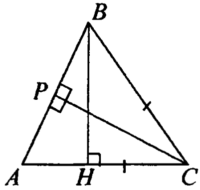


Рис. 5.

VI. В ΔABC $AC = BC$ и известно PC, найти BH.

1) Найдем $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}PC \cdot AB$;

2) из равенства $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BH \cdot AC$ выразим BH, $BH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC}$.

Задача 1[1]. В правильной шестиугольной призме $ADCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 3, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

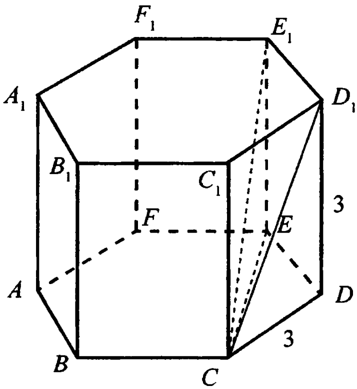


Рис. 6.

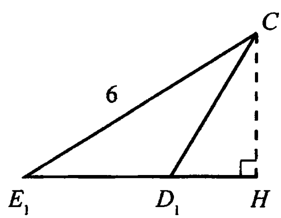


Рис. 7.

Решение. Найдем стороны ΔCD_1E_1. Из прямоугольного треугольника CDD_1 находим CD_1: $CD_1 = 3\sqrt{2}$.

Находим диагональ основания CE: $CE = 3\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника CEE_1 находим CE_1: $CE_1 = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$. Проводим $CH \perp D_1E_1$. CH – искомое расстояние (см. рис. 7).

Находим по теореме косинусов $\cos\angle E_1$ из ΔCD_1E_1: $CD_1^2 = D_1E_1^2 + CE_1^2 - 2D_1E_1 \cdot CE_1 \cdot \cos\angle E_1$, $18 = 36 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 3\cos\angle E_1$, $36\cos\angle E_1 = 27$, $\cos\angle E_1 = \frac{3}{4}$, $\sin\angle E_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

[1] Задача предлагалась на ЕГЭ в 2011 г.

Из треугольника C_1EH находим CH: $CH = 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

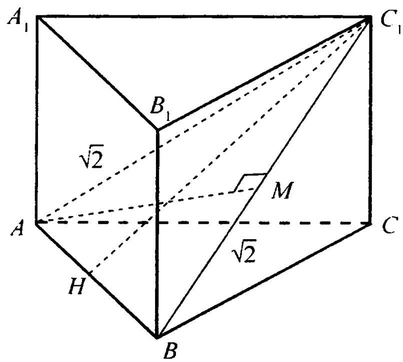


Рис. 8.

Решение. Рассмотрим ΔAC_1B, стороны которого равны: $AB = 1$, $BC_1 = AC_1 = \sqrt{2}$. Пусть $C_1H \perp AB$ и $AM \perp BC_1$. Так как ΔABC_1 равнобедренный, то C_1H легко найти из прямоугольного треугольника C_1HB:

$$C_1H = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}. \quad S_{\Delta ABC_1} = \frac{1}{2}C_1H\cdot AB = \frac{1}{2}AM\cdot BC_1.$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot 1 = AM\cdot\sqrt{2}, \text{ откуда } AM = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Найти расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где M и T – середины ребер AD и A_1B_1 соответственно.

Решение. Пусть P – середина ребра B_1C_1. Нужно найти расстояние от точки P до прямой MT.

Получаем ΔMPT. Из прямоугольного треугольника MNP находим $MP = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$.

Из прямоугольного треугольника TB_1P имеем $TP = \sqrt{2+2} = 2$.

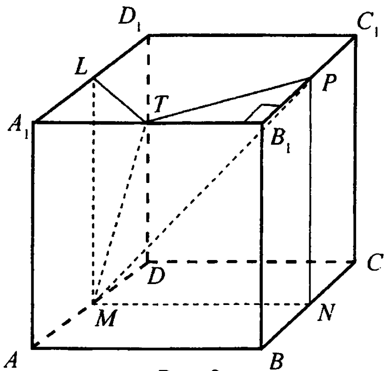


Рис. 9.

Так как $LT = TP = 2$, то из прямоугольного треугольника MLT имеем $MT = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$. Рассмотрим ΔMTP: $TP = 2$, $MT = 2\sqrt{3}$, $MP = 4$. Так как $MP^2 = MT^2 + TP^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, ΔMTP прямоугольный с прямым углом MTP и искомое расстояние $TP = 2$.

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дана правильная шестиугольная призма $ADCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, P – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки P до прямой BE_1.

   Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой BD_1.

   Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 1. Найдите расстояние от точки D до прямой MN, где M и N – середины ребер D_1A_1 и BC соответственно.

   Ответ: 3.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. F – середина B_1C_1, M и N – середины ребер AD и A_1B_1. Найдите расстояние от точки F до прямой MN.

   Ответ: 2.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AS = 2$, $AB = 1$. Найдите расстояние от точки A до прямой SK, где K – середина ребра BC.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{71}}{2\sqrt{15}}$.

6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная призма, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1E_1.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед. $AA_1 = 8$, $AD = 2\sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60°$. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1D_1.

Ответ: $2\sqrt{19}$.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки B до прямой A_1E_1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро которого равно 1. О – точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1. Найдите расстояние от точки O до прямой A_1C.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1; О – точка пересечения диагоналей грани BCC_1B_1, M и N – середины ребер AD и D_1C_1. Найдите расстояние от точки O до прямой MN.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

11. Ребро основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равно 1, M – середина ребра SD. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $SD = 2$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

12. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, все ребра которой равны 1. O – точка пересечения медиан $\Delta A_1B_1C_1$. Найдите расстояние от точки O до прямой BC.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 3$, $AB = 4$, $CC_1 = 6$. На ребре AA_1 взята точка F такая, что $AF : FA_1 = 2 : 1$, а на ребре BB_1 взята точка K такая, что $BK : B_1K = 1 : 2$. Точка M – середина ребра C_1D_1. Найдите расстояние от точки M до прямой FK.

Ответ: $\frac{9}{\sqrt{5}}$.

14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. O – точка пересечения диагоналей онования; N, P и M – середины отрезков AO, BC и SC соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой NP.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$.

15. В правильном тетраэдре $SABC$ ребро равно 1. O – точка пересечения медиан треугольника SBC; SM – медиана грани SAB. Найдите расстояние от точки O до прямой SM.

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{3}}$.

2.2. Угол между прямой и плоскостью

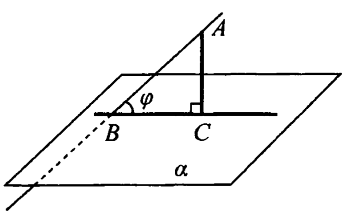


Рис. 10.

За угол между прямой и плоскостью принимается величина угла между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.

AB – прямая, $AB \cap \alpha = B$. $AC \perp \alpha$, BC – проекция AB на плоскость α, $\angle ABC$ – искомый.

Очевидно, $0 < \varphi \leq 90°$.

Задача 1. Угол A в основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ прямой, $AC = AB = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C.

Решение. 1) Проводим $AP \perp BC$;

2) $\begin{pmatrix} CC_1 \perp (ABC) \\ AP \subset (ABC) \end{pmatrix} \Rightarrow CC_1 \perp AP$;

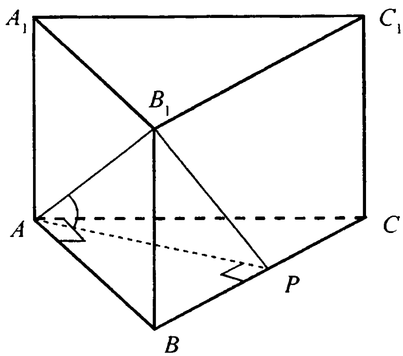


Рис. 11.

3) $\begin{pmatrix} AP\perp BC \\ AP\perp CC_1 \\ BC \cap CC_1 \end{pmatrix} \Rightarrow AP\perp(BCC_1);$

4) $\left.\begin{array}{l} AB_1 \text{ – наклонная к плоскости } BB_1C, \\ AP \text{ – перпендикуляр к плоскости } BB_1C, \\ B_1P \text{ – проекция на плоскость } BB_1C, \end{array}\right\} \Rightarrow \angle AB_1P$ – искомый;

5) Поскольку $BC = AB_1 = \sqrt{2}$, то $AP = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) Из треугольника AB_1P находим $\sin\angle AB_1P = \frac{AP}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.
$\angle AB_1P = 30°$.
Ответ: $30°$.

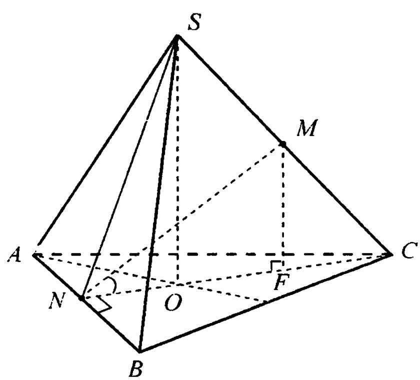


Рис. 12.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3, точки M и N – середины ребер SC и AB соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания пирамиды.

Решение. В плоскости SNC проведем $MF \perp NC$. Так как $SM = MC$, $MF \parallel SO$, то по теореме Фалеса $FC = FO$. Ясно, что угол MNC – искомый. Из ΔNCB по теореме Пифагора $NC = \sqrt{3}$.

Заметим, $OC = NF = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Так как $MC = \frac{3}{2}$, то из прямоугольного треугольника MNF находим MF: $MF = \sqrt{MC^2 - FC^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{23}{12}} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}$. Из этого же треугольника находим $\text{tg}\angle MNF$: $\text{tg}\angle MNF = \frac{MF}{NF} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{23}}{4}$.

$\angle MNF = \text{arctg}\frac{\sqrt{23}}{4}$.

Ответ: $\text{arctg}\frac{\sqrt{23}}{4}$.

Задача 3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ проведена высота SO, M и N – середины отрезков OC и SE соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания, если сторона основания 2, а боковое ребро 3.

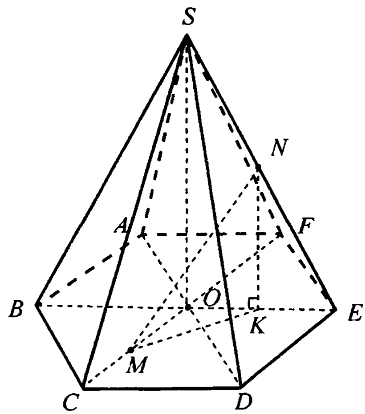


Рис. 13.

Решение. В плоскости SBE проводим $NK \parallel SO$, и поскольку $SO \perp (ABC)$, то $NK \perp (ABC)$, значит $\angle NMK$ – искомый.

Так как $OE = OC = 2$, то $OK = OM = 1$. Нетрудно видеть, что $\angle KOM = 120°$. Далее можно по теореме косинусов найти MK: $MK^2 = 1 + 1 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos120° = 3$. $MK = \sqrt{3}$.

По теореме Пифагора из ΔSOD находим SO: $SO = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

$NK = \frac{1}{2}\cdot SO = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Наконец, из прямоугольного треугольника NMK находим $\operatorname{tg}\angle NMK$: $\operatorname{tg}\angle NMK = \frac{NK}{MK} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Ответ: $\angle NMK = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения.

16. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M и N – середины ребер D_1C_1 и AA_1 соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью $ABCD$.
 Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

17. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC $AB = 8\sqrt{3}$ и $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M – точка пересечения медиан грани ABC.
 Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{15}{32}$.

18. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной в точке P высота $PK = 12$, сторона основания равна $9\sqrt{2}$. На ребре AP взята точка M так, что $PM : PA = 1 : 5$. Найдите угол, который образует прямая MK с плоскостью основания.
 Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{16}{3}$.

19. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $DD_1 = 8$. Найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью BDD_1.
 Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BDC_1.
 Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро $4\sqrt{2}$. На ребре SC взята точка так, что $SM = MC$. Найдите угол между прямой BM и плоскостью ABC.
Ответ: 45°.

2.3. Угол между двумя плоскостями

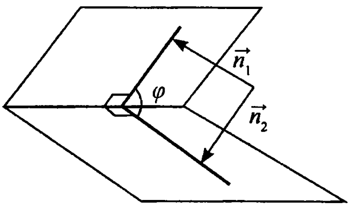


Рис. 14.

Угол между двумя плоскостями равен величине острого двугранного угла, образованного пересечением этих плоскостей.

Если величина двугранного угла равна 90°, то плоскости называются перпендикулярными.

Величина двугранного угла измеряется величиной его линейного угла.

Задача 1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания, равной 4, на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$, $A_1M = 5$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $BK = 5$, а $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостями D_1MK и CC_1D_1.

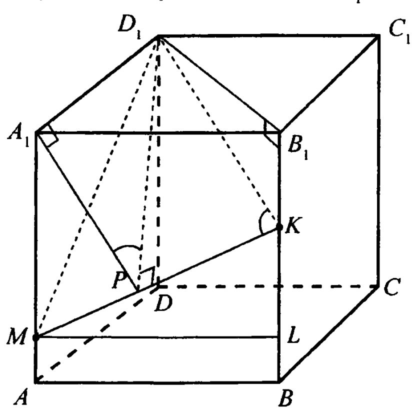


Рис. 15.

Решение. 1) Будем искать угол между плоскостью D_1MK и плоскостью ABB_1, параллельной плоскости CC_1D_1: 1) проведем $D_1P \perp MK$; $D_1A_1 \perp (AA_1B)$; D_1P – наклонная к плоскости (AA_1B), значит A_1P – проекция. Так как $MK \perp D_1P$ (по построению), то $A_1P \perp MK$;

2) $\left.\begin{array}{l} A_1P \subset (ABB_1),\ MK \subset (ABB_1) \\ A_1P \perp MK, \\ D_1P \perp MK, \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1PA_1$ – искомый;

3) D_1K ищем из прямоугольного треугольника D_1B_1K:

$D_1K = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$;

4) находим сторону треугольника D_1M:

$D_1M = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$;

5) проведем $ML \parallel AB$, тогда $MK = 5$;

6) применим теорему косинусов для треугольника D_1KM:

$D_1M^2 = MK^2 + D_1K^2 - 2MK \cdot D_1K \cdot \cos\angle K$, $41 = 61 - 60 \cdot \cos\angle K$, $\cos\angle K = \frac{1}{3}$. Далее $\sin^2\angle K = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, $\sin\angle K = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

7) из прямоугольного треугольника D_1PK находим D_1P: $\sin\angle K = \frac{D_1P}{D_1K}$, $\frac{D_1P}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $D_1P = 4\sqrt{2}$;

8) из прямоугольного ΔA_1PD_1 $\sin\angle P = \frac{A_1D_1}{D_1P} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle P = 45°$.

Ответ: 45°.

Рассмотрим решение задач с использованием уравнения плоскости.

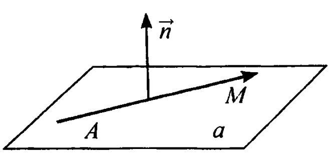


Рис. 16.

Составим уравнение плоскости. Если вектор $\vec{n}(a, b, c)$ перпендикулярен плоскости, проходящей через точку $A(x_0, y_0, z_0)$, а $M(x, y, z)$ – текущие координаты этой плоскости, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, а поэтому $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. После раскрытия скобок и приведения подобных получим $ax + by + cz + d = 0$, где $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Если уравнение одной из плоскостей $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, а уравнение другой плоскости $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, то косинус угла между ними равен модулю косинуса угла между перпендикулярными к ним векторами, поскольку за величину угла между плоскостями принимается величина острого угла, то есть $\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|$, где $\vec{n_1}\{a_1, b_1, c_1\}$, $\vec{n_2}\{a_2, b_2, c_2\}$ (рис. 14).

Задача 2. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона основания которой равна 2. На ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$, $MA_1 = 3$, а на ребре DD_1 – такая точка N, что $DN = 3$, $ND_1 = 2$. Найдите угол между плоскостью MNB и плоскостью основания призмы.

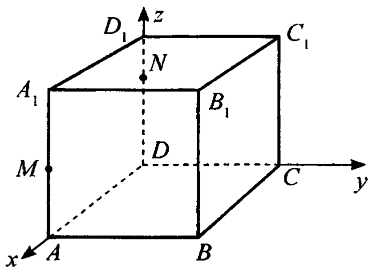


Рис. 17.

Решение: Выберем систему координат, как показано на рисунке 17. D – начало координат. Очевидно, что уравнение плоскости (ABC): $z = 0$. Далее находим координаты точек M, N и B: $M(2;0;2)$; $N(0;0;3)$; $B(2;2;0)$. Подставляя координаты точек M, N и B в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a + 2cz + d = 0, \\ 2a + 2b + d = 0, \\ 3c + d = 0, \end{cases}$$

откуда $c = -\dfrac{d}{3}$, $a = -\dfrac{d}{6}$, $b = -\dfrac{d}{3}$, и уравнение плоскости примет вид: $-\dfrac{d}{6}x - \dfrac{d}{3}y - \dfrac{d}{3}z + d = 0$, $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Вектор $\vec{n_1}(1;2;2)$ перпендикулярен этой плоскости, вектор $\vec{n_2}(0;0;1)$ перпендикулярен плоскости $z = 0$.

По формуле $\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|$ находим $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

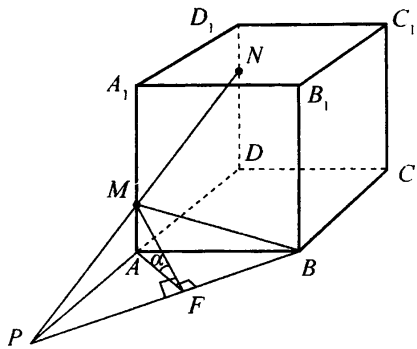


Рис. 18.

Теперь решим эту же задачу без применения уравнения плоскости.

Прямые MN и AD лежат в одной плоскости и пересекаются в точке P, которая принадлежит и плоскости основания. Так что PB – линия пересечения данных плоскостей.

Проведем $MF \perp PB$, $MF \subset (NMB)$. $MA \perp (ABC)$, MF – наклонная к плоскости (ABC) и AF – ее проекция.

По теореме о трех перпендикулярах $AF \perp PB$, $\angle MFA$ – искомый. $\Delta PMA \sim \Delta PND \Rightarrow \frac{MA}{ND} = \frac{PA}{PD}$; $\frac{2}{3} = \frac{PA}{PA+2}$, откуда $PA = 4$. Далее дважды находим площадь треугольника PAB. По теореме Пифагора $PB = 2\sqrt{5}$. $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot 2\sqrt{5}$, $AF = \frac{4}{\sqrt{5}}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 3. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, сторона основания которой равна 2, а высота 3. Точки M и F – середины ребер SD и SC соответственно. Найдите угол между плоскостью ABM и плоскостью основания пирамиды.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 19. Найдем координаты точек A, B, C, S, F:

$A(1;-1;0)$; $B(1;1;0)$; $S(0;0;3)$; $C(-1;1;0)$; $F(-0,5;0,5;1,5)$.

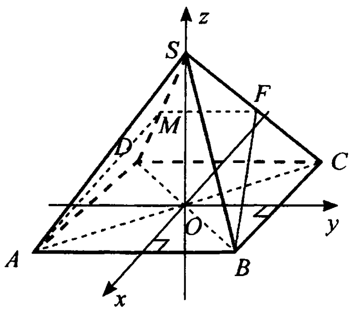


Рис. 19.

Подставляя координаты точек A, B и F в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a - b + d = 0, \\ a + b + d = 0, \\ -0{,}5a + 0{,}5b + 1{,}5c + d = 0. \end{cases}$$

Откуда $a = -d$, $b = 0$, $c = -d$. Легко видеть, что уравнение плоскости будет: $-dx - dz + d = 0$, или $x + z - 1 = 0$. Вектор $\overrightarrow{n_1}\{1;0;1\}$ перпендикулярен этой плоскости, а вектор $\overrightarrow{n_2}\{0;0;1\}$ перпендикулярен плоскости основания, уравнение которой $z = 0$. Следовательно, косинус угла между плоскостями равен:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right| = \left|\frac{1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}{|\sqrt{1^2+0^2+1^2}|\cdot|\sqrt{0^2+0^2+1^2}|}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$ а угол равен 45°.

Рассмотрим решение этой задачи без использования уравнения плоскости.

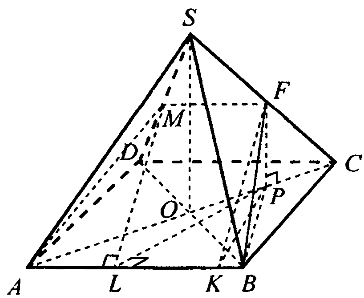


Рис. 20.

Решение: В плоскости SOC проведем $FP \parallel SO$, и так как $SO \perp (ABC)$, то $FP \perp (ABC)$ (рис. 20).

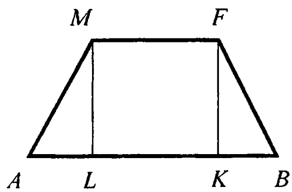


Рис. 21.

В трапеции $ABFM$ (рис. 21) проведем $FK \perp AB$, тогда PK – проекция FK на плоскость (ABC), и поскольку $FK \perp AB$, то и $PK \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах). $\angle FKP$ – искомый.

Заметим, что FP – средняя линия ΔSOC и $FP = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{3}{2}$.

Из ΔBPC по теореме косинусов находим BP^2:

$BP^2 = PC^2 + BC^2 - 2 \cdot PC \cdot BC \cdot \cos 45°$;

$BP^2 = \frac{2}{4} + 4 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

Из ΔFBP по теореме Пифагора находим FB: $FB = \sqrt{FP^2 + BP^2}$;

$BP = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

ML находим из ΔAML, заметив, что $AL = KB = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ (рис. 21).

$FK = ML = \sqrt{\frac{19}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Из ΔFKP (рис. 20) имеем $\sin\angle FKP = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\angle FKP = $
$= \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

Ответ: 45°.

Задачи для самостоятельного решения.

22. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 4$, $SC = 3$.

Ответ: $\arccos\frac{8}{\sqrt{66}}$.

23. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 4. На ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 1$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 1$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{29}}$.

24. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все ребра равны. Точка M – середина ребра SC. Найдите угол между плоскостью ADM и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{11}}$.

25. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания. Найдите двугранные углы между соседними боковыми гранями этой пирамиды.

Ответ: $\arccos(2-\sqrt{5})$.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно: $AB = AD = 1$, $AA_1 = 2$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

Ответ: $\arccos\frac{1}{9}$.

27. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $AB = 4$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$.

28. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, перпендикулярной прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}$.

29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = 2$, $A_1B = \sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостями (A_1BC_1) и (ABC).
Ответ: 30°.

2.4. Угол между скрещивающимися прямыми

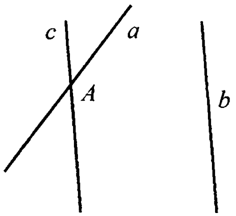


Рис. 22.

Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b (рис. 22). Взяв произвольную точку на одной из них, проведем через нее прямую, параллельную другой прямой. В нашем случае $c \parallel b$, тогда $(a^\wedge b) = (a^\wedge c)$.

Задача 1. В правильном тетраэдре $SABC$ точки M и N – середины ребер AB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AS и MN.

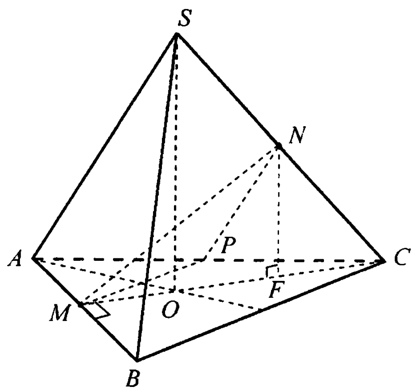


Рис. 23.

Решение. Примем ребро тетраэдра равным 1 и в плоскости SAC проведем $NP \parallel AS$, тогда угол между прямыми AS и MN равен углу между прямыми MN и NP.

В ΔNMP $MP = NP = \frac{1}{2}$.

Найдем длину MN.

В плоскости SMC проводим $NF \parallel SO$, и поскольку $SO \perp (ABC)$, то и $NF \perp (ABC)$.

Так как $SN = NC$ и $NF \parallel SO$, то $FC = OF = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ и $MF = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из ΔSOC находим SO: $SO = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. NF – средняя линия ΔSOC: $NF = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из прямоугольного треугольника MNF по теореме Пифагора находим MN: $MN = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Применим теорему косинусов в треугольнике MNP:
$MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN\cdot NP\cdot\cos\angle MNP$,
$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\angle MNP$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\angle MNP$,

$\cos\angle MNP = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle MNP = 45°$.

Ответ: 45°.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M и N – середины ребер A_1D_1 и BB_1. Найдите угол между прямой MN и диагональю BD_1.

Решение. 1-й способ.

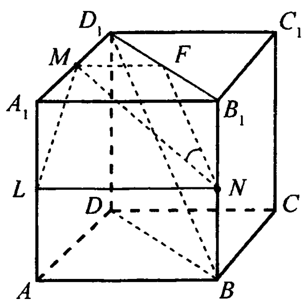


Рис. 24.

Все кубы подобны, поэтому примем ребро куба за 1. В плоскости BDD_1, которой принадлежит точка N, проводим $NF \parallel BD_1$, тогда угол между прямыми MN и BD_1 равен углу между прямыми MN и NF, то есть надо найти $\angle MNF$, который содержится в треугольнике MNF. Заметим, что MF – средняя линия $\Delta A_1D_1B_1$ и $MF = \frac{1}{2}$.

Из прямоугольного треугольника NB_1F находим NF:
$NF = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(FB_1 = \frac{1}{2}\cdot D_1B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Далее проводим $NL \parallel AB$, получаем прямоугольный треугольник MLN.

$$\begin{pmatrix} AB \perp (ADD_1) \\ AB \parallel LN \end{pmatrix} \Rightarrow LN \perp (ADD_1).$$

Из прямоугольного треугольника A_1LM находим LM:

$$LM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника MLN находим MN:

$$MN^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad MN = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

К ΔMFN применим теорему косинусов:

$$MF^2 = MN^2 + NF^2 - 2MN \cdot NF \cdot \cos\angle MNF,$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \cos\angle MNF, \quad 2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \cos\angle MNF,$$

$$\cos\angle MNF = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \angle MNF = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение. 2-й способ.

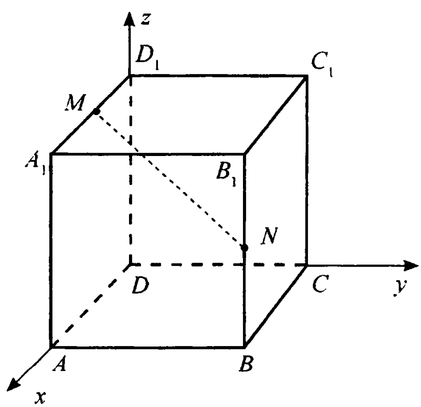


Рис. 25.

Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 25. Находим координаты точек B, D_1, M, N: $B(1;\ 1;\ 0)$,

$D_1(0;\ 0;\ 1)$, $M(\frac{1}{2};\ 0;\ 1)$, $N(1;\ 1;\ \frac{1}{2})$ и координаты векторов $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$:
$\overrightarrow{BD_1}\{-1;-1;\ 1\}$, $\overrightarrow{MN}\{\frac{1}{2};\ 1;-\frac{1}{2}\}$.

Искомый угол находится по формуле $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|$.

Имеем $\cos\angle MNF = \left|\dfrac{-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+1}}\right| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Сравнение двух способов решений показывает, что применение координатного метода проще.

Задачи для самостоятельного решения.

30. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M – середина ребра AA_1, N – такая точка ребра CC_1, что $C_1N : NC = 1 : 2$. Найдите угол между прямой MN и диагональю D_1B.

    Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{219}}$.

31. В правильном тетраэдре $SABC$ M – середина ребра AB. Найдите угол между прямыми SM и BC.

    Ответ: $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

32. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M – середина ребра BC, L – середина ребра AB.

    Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

33. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона основания которой равна 5, а боковое ребро 12, найдите угол между прямыми AC и BC_1.

    Ответ: $\arccos\frac{5}{13\sqrt{2}}$.

34. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

    Ответ: 0,8.

35. В правильном тетраэдре $SABC$ с вершиной S точка M – середина ребра AS, SO – высота пирамиды. Найдите угол между прямыми MB и SO.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2.5. Расстояние между скрещивающимися прямыми

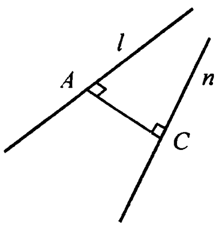


Рис. 26.

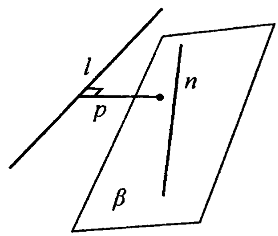


Рис. 27.

Для двух скрещивающихся прямых l и n существует единственный отрезок AC ($A \in l$, $C \in n$), перпендикулярный этим прямым, а его длина есть расстояние между ними, т.е. $d(l,n) = AC, AC \perp l, AC \perp n$. *Длина этого перпендикуляра – кратчайшее расстояние между прямыми, причем этот перпендикуляр единственный* (рис. 26).

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, можно через одну из них провести плоскость, параллельную другой прямой, и искать расстояние от любой точки этой прямой до плоскости. ($n \in \beta$, $l \parallel \beta$, $p \perp l$, $p \perp \beta$) $\Rightarrow$ *p – искомое расстояние* (рис. 27).

Задача 1. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ с вершиной S равно 1. Найдите расстояние между прямыми AS и BC.

Решение. Проводим $SM \perp BC$ и $AM \perp BC$, тогда $BC \perp (ASM)$. В плоскости ASM проводим $MT \perp AS$.

Так как $BC \perp (ASM)$ и $TM \subset (ASM)$, то $BC \perp MT$. МТ – искомое расстояние.

Находим дважды площадь ΔASM. $AO = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

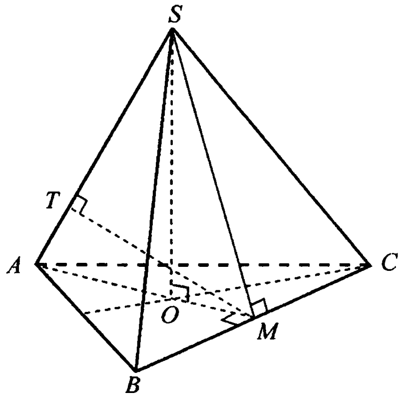


Рис. 28.

Из прямоугольного ΔASM находим SO: $SO = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$S_{\Delta ASM} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $S_{\Delta ASM} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot TM = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot TM = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$TM = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите расстояние между прямыми CK и A_1D, где K – середина ребра DD_1.

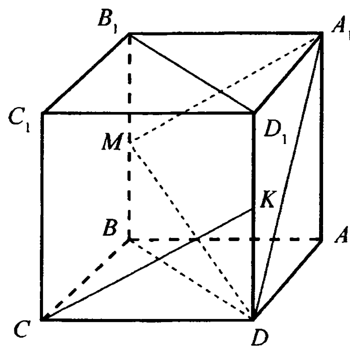


Рис. 29.

Решение. Пусть M – середина ребра BB_1 (рис. 29), тогда $MA_1 \parallel CK$, плоскость $(A_1DM) \parallel CK$, значит расстояние между CK и A_1D равно расстоянию от K до плоскости A_1DM.

Пусть это расстояние равно x, тогда $V_{A_1MDK} = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1MD} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1KD} \cdot 1 = = \frac{1}{12}$, откуда $x = \frac{1}{4S_{A_1MD}}$.

Теперь ищем площадь ΔA_1MD, для этого найдем его стороны: $A_1D = \sqrt{2}$; $A_1M = \frac{\sqrt{5}}{2}$; из прямоугольного треугольника MBD: $MD = = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Далее находим $\cos\angle MA_1D$, применив теорему косинусов:

$DM^2 = A_1M^2 + A_1D^2 - 2A_1M \cdot A_1D \cdot \cos\angle MA_1D$;

$\frac{9}{4} = \frac{5}{4} + 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\angle MA_1D$; $\cos\angle MA_1D = \frac{1}{10}$;

$\sin\angle MA_1D = \sqrt{1 - \cos^2\angle MA_1D} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi$; $S_{\Delta A_1MD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{4}$, значит $x = \frac{1}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 3. В правильном тетраэдре $SABC$ с вершиной S M – середина ребра SC. Найдите расстояние между прямыми AS и BM, если ребро тетраэдра равно 1.

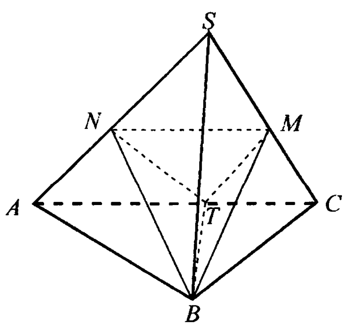


Рис. 30.

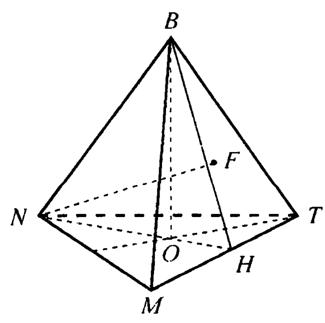


Рис. 31.

Решение. В плоскости SAC проведем прямую $MT \parallel AS$, тогда $AS \parallel (BTM)$, причем $BM \subset (BTM)$. Будем искать расстояние от произвольной точки прямой AS до плоскости BTM. Удобнее взять точку N как вершину пирамиды $BMTN$. У нее $BM = BT = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $NT = MT = NM = \frac{1}{2}$ (рис. 30). Пирамида $BMTN$ правильная (рис. 31).

Из треугольника BOT по теореме Пифагора находим BO:

$$BO = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{8}{12}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Объем пирамиды $BMTN$ равен: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{24}$.

Пусть $NF \perp (BTM)$, тогда объем пирамиды $BMTN$ с плоскостью основания BMT равен: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{BTM} \cdot NF$. Находим площадь треугольника BMT. Проводим $BH \perp MT$, $HT = \frac{1}{4}$. Из ΔBMT имеем:

$$BH = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4};\ S_{BTM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16};\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{16} \cdot NF = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

$$NF = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

Задачи для самостоятельного решения.

36. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

37. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

2.6. Расстояние от точки до плоскости

Если точка не принадлежит плоскости, то расстояние от этой точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

При решении некоторых задач удобно пользоваться формулой объема пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H$, откуда $H = \frac{3V}{S_{осн}}$. Длина H высоты и есть расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания. Если пирамида треугольная, то за основание пирамиды можно принять любую ее грань.

В некоторых случаях построение перпендикуляра из точки на плоскость проводится так:

– через точку проводим плоскость, перпендикулярную данной плоскости;
– из данной точки опустим перпендикуляр на линию пересечения плоскостей;
– длина этого перпендикуляра и есть расстояние от точки до плоскости.

Задача 1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости AD_1C.

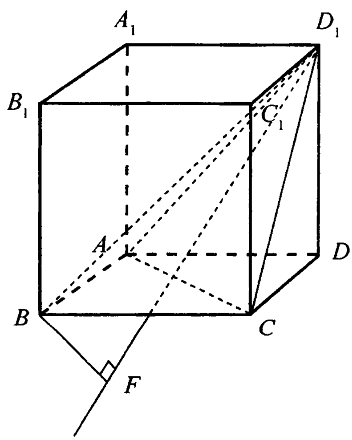


Рис. 32.

Решение. Рассмотрим пирамиду $ABCD_1$, высота DD_1 которой падает на плоскость ABC, но не на ΔABC. Пусть $BF \perp (AD_1C)$. Дважды находим объем пирамиды $ABCD_1$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DD_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{AD_1C} \cdot BF,\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot BF,\ 1 = \sqrt{3} \cdot BF,$$

$$BF = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Сторона основания пирамиды равна 8, а высота 3. Через сторону основания AB и середину ребра SC проведена плоскость. Найдите расстояние от вершины пирамиды до этой плоскости.

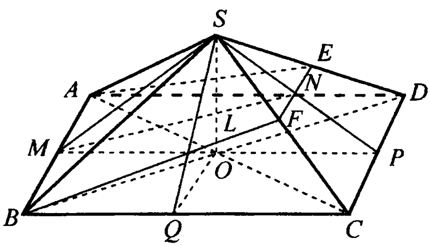


Рис. 33.

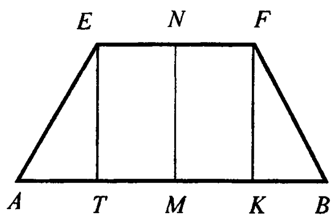


Рис. 34.

Решение. $AEFB$ – плоскость сечения. Проведем через высоту SO плоскость MSP (рис. 33), перпендикулярную ребру AB. Пусть MN – линия пересечения этой плоскости с плоскостью сечения. Очевидно, что MN – высота трапеции $ABFE$, поскольку она соединяет середины оснований. Так как плоскость $ABFE$ содержит прямую $AB \perp (MSN)$, то $(MSN) \perp (ABF)$, а поэтому перпендикуляр, опущенный из вершины S на плоскость $ABFE$, лежит в плоскости MSN и перпендикулярен отрезку MN, но тогда высота пирамиды $SABFE$ совпадает с высотой треугольника MNS.

Найдем эту высоту. $SM = SP = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, тогда $SN = 2{,}5$.

Применим к ΔSMN теорему косинусов: $MN^2 = MS^2 + SN^2 - 2MS \cdot NS \cdot \cos\angle MSN$ (*). Для дальнейшего решения задачи найдем

MN – высоту трапеции $ABFE$. $OC = 4\sqrt{2}$. Из ΔSOC найдем SC:
$SC = \sqrt{9+32} = \sqrt{41}$; $FC = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

Далее из ΔSQC находим $\cos\angle SCQ$: $\cos\angle SCQ = \dfrac{QC}{SC} = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$.

Из треугольника BFC, по теореме косинусов, находим BF:

$$BF^2 = 64 + \frac{41}{4} - 2\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{41}} = 32 + \frac{41}{4} = \frac{169}{4} \text{ и } BF = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}.$$

Высоту $MN = FK$ ищем из ΔFKB по теореме Пифагора (рис. 34).

$$MN = FK = \sqrt{\frac{169}{4} - 4} = \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

Возвращаемся к формуле (*), получаем:

$$\frac{153}{4} = 25 + \frac{25}{4} - 2\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot\cos\angle MSN, \quad 7 = -25\cdot\cos\angle MSN,$$

$$\cos\angle MSN = -\frac{7}{25}, \quad \sin\angle MSN = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25}.$$

$$S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2}\cdot SM\cdot SN\cdot\sin\angle MSN = \frac{1}{2}\cdot SL\cdot MN;$$

$$SL = \frac{5\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{24}{25}}{\frac{\sqrt{153}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{153}} = \frac{24}{\sqrt{9\cdot 17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{\sqrt{17}}$.

Задача 3. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM, где M – середина ребра A_1C_1.

Решение. Проведем $C_1P \perp MC$. $(BCM) \cap (A_1B_1C_1) = ML$, причем $ML \parallel BC$, $ML \parallel B_1C_1$.

Так как призма прямая и $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90°$, то $ML \perp (ACC_1)$, а поэтому $C_1P \perp (BCM)$. Искомое расстояние равно длине отрезка C_1P.

Находим C_1M: $C_1M = \dfrac{1}{2}\cdot A_1C_1 = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$.

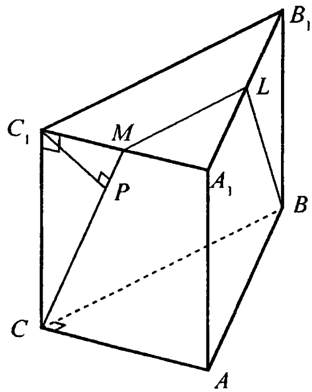


Рис. 35.

Из ΔCC_1M по теореме Пифагора находим CM:
$CM^2 = CC_1^2 + C_1M^2 = 20 + 5 = 25,\ CM = 5.$

Дважды применяя формулу нахождения площади для ΔCC_1M, получим:

$$S_{\Delta CC_1M} = \frac{1}{2} \cdot C_1M \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot C_1P;\ C_1P = \frac{C_1M \cdot CC_1}{CM} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 2.$$

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения.

38. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. Через ребро A_1C_1 и середину ребра BB_1 проведено сечение. Найдите расстояние от середины ребра BC до этого сечения.

    Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

39. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны 1. Найдите расстояние от центра основания пирамиды до плоскости SCD.

    Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

40. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1 и $\sqrt{3}$, высота параллелепипеда равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1.

    Ответ: $0{,}4\sqrt{15}$.

41. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро 2, M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости A_1DC_1.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

42. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ высота равна 2, а сторона основания 3. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCD.

Ответ: 2,4.

43. $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида с вершиной S. $SA = \sqrt{5}$, $AD = 2$, M – середина SC. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM.

Ответ: 1.

44. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ $AB = \sqrt{3}$, $SA = 2$, O – основание высоты пирамиды, $SO \perp (ABC)$. Найдите расстояние от точки O до плоскости SAB.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{39}}$.

45. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

46. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 3$. M – середина ребра CC_1. Найдите расстояние от точки C до плоскости AMC, если высота призмы равна 2.

Ответ: $\frac{12}{13}$.

Задания уровня С3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Уравнения вида $a^{f(x)} = 1$

Уравнение вида $a^{f(x)} = 1$ при $a = 1$ имеет бесконечное множество корней, так как $1^{f(x)} = 1$ и x – любое из области определения функции. Очевидно, что $a \neq 0$ при остальных a $a^{f(x)} = a^0$ и $f(x) = 0$.

Пример. Решите уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{x^2} = 1$.

Решение: Так как $2^{x^2} \cdot 3^{x^2} = 6^{x^2}$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 = 0$ и $x = 0$.

Ответ: 0.

Задание для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2} = 1$.

Ответ: 0; –0,5.

3.2. Уравнения вида $(g(x))^{f(x)} = 1$

Если $g(x) = 1$, то корни этого уравнения являются корнями данного уравнения, если входят в область определения функции $f(x)$. Если $g(x) \neq 1$, то $f(x) = 0$, при этом необходимо помнить, что при найденных значения x выражение $(g(x))^{f(x)}$ должно быть определено.

Пример. Решите уравнение $|x - 2|^{x^2 - 6x + 8} = 1$.

Решение: Корни данного уравнения находятся среди корней уравнения $|x - 2| = 1$, откуда $x = 3$ и $x = 1$. Далее решаем уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$, корни которого 2 и 4. Но при $x = 2$ выражение $|x-2|^{x^2-6x+8}$ не определено: имеем неопределенность вида 0^0.

Ответ: 4.

Задание для самостоятельного решения.

2. Решите уравнение $|x^2-4|^{x^2-5x+6} = 1$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{5}$; 3.

3.3. Уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Для решения данного уравнения разделим обе части его на $b^{f(x)} \neq 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$), получим $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$, откуда $f(x) = 0$.

Пример. Решите уравнение $6^{2x+1} = 3^{3x-1} \cdot 2^{x-1}$.

Решение: $6^{2x} \cdot 6 = 3^{3x} \cdot 3 \cdot 2^x \cdot 2$, $36^x = 27^x \cdot 2^x$, $36^x = 54^x$.

$\left(\frac{36}{54}\right)^x = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, откуда $x = 0$.

Ответ: 0.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

3. $2^{x+3} = 3^{x+1} + 3^{x-2}$.

Ответ: -1.

4. $9^{x+1} - 12 \cdot 6^x + 4^{x+1} = 0$.

Указание: преобразовать левую часть уравнения к виду $(3 \cdot 3^x - 2^x \cdot 2)^2 = 0$.

Ответ: -1.

3.4. Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Здесь левая и правая части уравнения содержат одно и то же основание. В силу монотонности функции $y = a^t$ ($a > 0$, $a \neq 1$) заключаем, что решением этого уравнения будут корни уравнения $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $|x-2|^{3x^2-1} = |x-2|^{2x}$.

Решение. Имеем очевидный корень $x = 2$. Пусть $|x-2| = 1$, тогда $x = 3$ и $x = 1$.

Далее получаем уравнение $3x^2 - 1 = 2x$, $3x^2 - 2x - 1 = 0$, его корни 1 и $-\frac{1}{3}$.

Ответ: $1; -\frac{1}{3}; 3; 2$.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt[x-1]{8^{x+1}} = \sqrt[x+1]{16^{x+3}}$.

Решение: Область определения уравнения определяется неравенством $x \geq 2$ и $x \in N$. Так как $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, то $8^{\frac{x+1}{x-1}} = 16^{\frac{x+3}{x+1}}$, что равносильно уравнению $2^{\frac{3x+3}{x-1}} = 2^{\frac{4x+12}{x+1}}$, $\frac{3x+3}{x-1} = \frac{4x+12}{x+1}$, откуда $x = 3$ и $x = -5$, где -5 – посторонний корень.

Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

5. $\frac{4^{x+2}}{0{,}5^{x-1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4^x}}$.

Ответ: $-\frac{9}{22}$.

6. $\sqrt[x]{3^{x+3}} = \sqrt[x-1]{9^{2x-4}}$.

Ответ: 3.

7. $2^{x^2+1} \cdot 9^{6x-8} = 6^{x^2+1}$.

Ответ: $6 \pm \sqrt{19}$.

3.5. Уравнения вида $a_0 m^{nx+C_1} + a_1 m^{nx+C_2} + ... + a_n m^{nx+C_n} = F$

В уравнениях подобного вида в показателе степени стоит один и тот же коэффициент. Для решения уравнений такого вида можно воспользоваться вынесением за скобки m^{nx}, но лучше вынести за скобки множитель m^{nx+C_k}, где C_k – наименьшее из чисел C_i, $i = 1, 2, 3,..., n$, тогда в скобках останется постоянное число, которое обозначим через A. Далее получим уравнение $m^{nx+C_k} \cdot A = F$. Если $\frac{F}{A} \leq 0$, то данное уравнение корней не имеет. Если $F = A$, то $nx + C_k = 0$, и если $\frac{F}{A} > 0$, то $\frac{F}{A} = m^{nx+C_k}$.

Пример. Решите уравнение $3^{\sqrt{x}+1}-2\cdot 3^{\sqrt{x}}-3^{\sqrt{x}-1}=6$.

Решение: Вынесем за скобки множитель $3^{\sqrt{x}-1}$, получим

$3^{\sqrt{x}-1}\left(\frac{3^{\sqrt{x}+1}}{3^{\sqrt{x}-1}}-\frac{2\cdot 3^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt{x}-1}}-1\right)=6,\ 3^{\sqrt{x}-1}\cdot 2=6,\ 3^{\sqrt{x}-1}=3,\ x=4.$

Ответ: 4.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

8. $2^{x+4}-2^{x+2}=24$.

   Ответ: 1.

9. $3^{x}-3^{x-3}=78$.

   Ответ: 4.

10. $4^{2x-9}-2^{4x-24}+16^{x-6}-256^{0,5x-3}=1008$.

   Ответ: 7.

11. $9^{x}-2^{x-0,5}=2^{x+3,5}-3^{2x-1}$.

   Ответ: 1.5.

12. $6^{x}+6^{x+1}+6^{x+2}=7^{x}-7^{x+1}+7^{x+2}$.

   Ответ: 0.

3.6. Уравнения вида $ma^{2f(x)}+na^{f(x)}+P=0$

Это уравнение подстановкой $y=a^{f(x)}$, где $y>0$, сводится к обыкновенному квадратному уравнению $my^2+ny+P=0$. Найдя его корни y_1, y_2 и выбрав те из них, которые больше нуля, решают уравнения $y_1=a^{f(x)}$ и $y_2=a^{f(x)}$. Если же $y_1\le 0$ и $y_2\le 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример. Решите уравнение $9^{x+1}-5\cdot 3^{x-1}=\frac{4}{9}$.

Решение: Используя свойства степени, представим исходное уравнение в виде $3^{2x}\cdot 9-\frac{5}{3}\cdot 3^{x}-\frac{4}{9}=0$.

Полагая далее $3^x=t$, $t>0$, приходим к квадратному уравнению $9t^2-\frac{5}{3}t-\frac{4}{9}=0$, откуда $t_1=\frac{1}{3}$ и $t_2<0$.

Значит, $3^x=\frac{1}{3}$ и $x=-1$.

Ответ: -1.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

13. $3^{2x-1} + 2\cdot 3^{x+1} = 81$.

Ответ: 2.

14. $5^{x+1} + 5^{-x+2} = 126$.

Указание: $5^{-x+2} = \dfrac{25}{5^x}$ и далее $5^x = y, y > 0$.

Ответ: $-1; 2$.

15. $2^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

16. $8^{x^2} + 2^{x^2-x} - 3\cdot 2^{(x-1)^2} = 0$.

Указание: сократить обе части уравнения на $2^{x^2-2x} \neq 0$.

Ответ: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

17. $\dfrac{5^x + 3^x}{5^x - 3^x} = \dfrac{4\cdot 5^{x-1}}{2\cdot 5^x - 3^{x+1}}$.

Указание: Разделить числитель и знаменатель в обеих частях уравнения на 5^x и далее применить подстановку $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = a,\ a > 0$.

Ответ: 1.

18. $3^{x-2} - \dfrac{4}{3^{x-2}} + 3^{x-1} - \dfrac{6}{3^{x-1}} = -2$.

Указание: Применить подстановку $3^{x-1} = t,\ t > 0$.

Ответ: 2.

3.7. Уравнения вида $ma^{2f(x)} + na^{f(x)}\cdot b^{f(x)} + q\cdot b^{2f(x)} = 0$

Это уравнение решается делением обеих частей на $a^{2f(x)} \neq 0$ или на $b^{2f(x)} \neq 0$. В первом случае получаем $m + n\left(\dfrac{b}{a}\right)^{f(x)} + q\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2f(x)} = 0$. Выполняем подстановку $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{f(x)} = t,\ t > 0$ и получаем обыкновенное квадратное уравнение.

Пример. Решите уравнение $9^{x-0,5} + 4^{x-0,5} = 10\cdot 6^{x-0,5}$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $9\cdot 9^{x-0,5} + 4^{x-0,5} =$ $= 10\cdot 6^{x-0,5}$ и разделим обе части его на $4^{x-0,5} > 0$, получим

$$9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x-0,5)} + 1 = 10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x-0,5}.$$

Положим $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-0,5} = a$, $a > 0$ и получаем обыкновенное квадратное уравнение $9a^2 - 10a + 1 = 0$, корни которого $a_1 = \frac{1}{9}$ и $a_2 = 1$. Возвратимся к прежней переменной $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-0,5} = \frac{1}{9}$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-0,5} = 1$. Решением второго уравнения будет 0,5, а первое уравнение перепишем $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-0,5} = 9$ и логарифмируем обе части уравнения, после чего получим $x = 0,5 + \log_{\frac{2}{3}}9$.

Ответ: 0,5; $0,5 + \log_{\frac{2}{3}}9$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

19. $4^x + 9^x = 2\cdot 6^x$.
Ответ: 0.

20. $25^{x+1} + 4^{x-1} = 20\cdot 10^x$.
Ответ: -1.

21. $3\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 5\cdot 9^x = 0$.
Ответ: 0; 1.

22. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.
Указание: $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x}$.
Ответ: ± 2.

23. $3\cdot 5^{x-2} - 2\cdot 5^{4-x} - 5 = 0$.
Ответ: 3.

24. $3^{x+1} - 5^x + 3^{x-1} - 5^{x-1} = 5^{x-2} - 3^{x-2}$.
Ответ: 2.

25. $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$.
Ответ: -1; 0.

26. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 0.$

Ответ: 1,5.

27. $3\cdot 4^x - 7\cdot 10^x + 2\cdot 25^x = 0.$

Ответ: $\log_{\frac{2}{5}}2$; $\log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{3}$.

28. $\dfrac{5^x}{2^{x-1} - 5^x} = 8 - \dfrac{2^{x+1}}{5^x}.$

Ответ: $\log_{\frac{2}{5}}3$.

29. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x.$

Ответ: 2; $\log_3 2 - 4$.

30. $\dfrac{2\cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3.$

Ответ: $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{13}+1}{6}$.

3.8. Решение показательных неравенств с использованием свойств показательной функции

Отметим несколько свойств показательной функции $y = a^x$.

1. Областью определения показательной функции является множество всех действительных чисел, то есть $D(y) = R$.

2. Областью значений является множество положительных чисел, то есть $E(y) = R_+$.

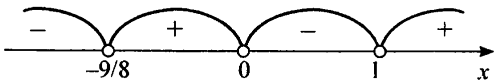
3. Если $a > 1$, то показательная функция возрастает, при этом неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательная функция убывает и при этом неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Пример. Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{3}-\frac{3}{x}} > \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-\frac{5}{2}x}$.

Решение: Так как $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$, то $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{3}-\frac{3}{x}} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{3}x}$.

Функция $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ убывающая, а поэтому $x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x} < -\dfrac{5}{3}x$ (согласно свойству 3).

После преобразований получим $\frac{8x^2 + x - 9}{3x} < 0$. Пусть $g(x) = \frac{8x^2 + x - 9}{3x}$; $D(g)$: $x \neq 0$. Нули функции g: $x = 1$; $x = -\frac{9}{8}$.



Ответ: $(-\infty; -\frac{9}{8}) \cup (0; 1)$.

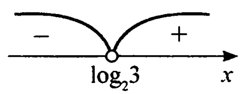
3.9. Решение показательных неравенств методом интервалов

Отметим, что некоторые показательные неравенства удобно решать методом интервалов.

Пример 1. Решите неравенство $4^x < 2^{x+1} + 3$.

Решение: Пусть $f(x) = 4^x - 2 \cdot 2^x - 3$, то $D(f) = R$ и необходимо решить неравенство $f(x) < 0$. Находим нули функции.

$4^x - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$, $2^x = -1$ (нет корней) или $2^x = 3$, $x = \log_2 3$. Далее применяем метод интервалов: $f(0) < 0$, $f(2) > 0$.

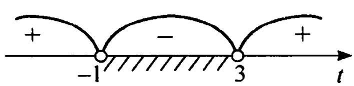


Ответ: $(-\infty; \log_2 3)$.

Замечание: Существует иной подход в решении данного неравенства.

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$. Решаем неравенство $t^2 - 2t - 3 = 0$, $(t + 1)(t - 3) < 0$.

Далее применяем метод интервалов:



Итак, $-1 < t < 3$, но $t > 0$, поэтому $0 < 2^x < 3$, $x < \log_2 3$.

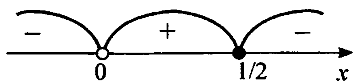
Конечно, при решении неравенства $(t + 1)(t - 3) < 0$ можно было выполнить сокращение на $t + 1 > 0$.

Пример 2. Решите неравенство $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\le 0$.

Решение: Применим метод интервалов, пусть $f(x)=4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3$. Решаем неравенство $f(x)\le 0$. Заметим, что $D(f)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$.

Для нахождения нулей функции решаем уравнение $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3=0$.

Полагая $2^{\frac{1}{x}-1}=t$, где $t>0$, приходим к уравнению $t^2-\frac{1}{2}t-3=0$ с положительным корнем $t=2$. Следовательно, $2^{\frac{1}{x}-1}=2$, $x=\frac{1}{2}$, с учетом области определения получим: $f(x)<0$, $f\left(\frac{1}{3}\right)>0$, $f(1)<0$.

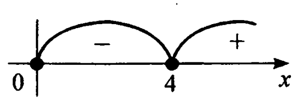


Ответ: $(-\infty;\,0)\cup\left[\frac{1}{2};\,+\infty\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $4^x\le 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}+4^{1+\sqrt{x}}$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=4^x-3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}-4^{1+\sqrt{x}}$. Областью определения функции является луч $[0;\,+\infty)$. Найдем нули функции f: $4^x-3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}-4^{1+\sqrt{x}}=0$.

Разделив обе части последнего уравнения на $2^{\sqrt{x}+x}$, получим $2^{x-\sqrt{x}}-\frac{4}{2^{x-\sqrt{x}}}-3=0$, откуда $2^{x-\sqrt{x}}=4$, $x-\sqrt{x}=2$, а последнее уравнение имеет единственный корень $x=4$. Применяем метод интервалов: $f(1)<0$, $f(9)=4^9-3\cdot 2^{12}-4^4=2^8(2^{10}-2\cdot 2^4-1)>0$.



Ответ: $[0;\,4]$.

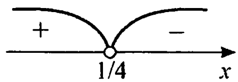
Пример 4. Решите неравенство $\frac{4^x-2}{2^{2x}-\sqrt{2}}<1$.

Решение: Введем в рассмотрение функцию $f(x)=\frac{4^x-2}{2^{2x}-\sqrt{2}}-1$.

Легко видеть, что $2^{2x}-\sqrt{2}\ne 0$, откуда $D(f)=(-\infty;\,\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{4};\,+\infty)$.

Находим нули функции $f(x)$: $4^x-2-2^{2x}+\sqrt{2}=0$. Уравнение корней не имеет, а значит, решение неравенства ищем на области опре-

деления функции. $f(0) = \sqrt{2} > 0$, $f(1) = \dfrac{2}{4-\sqrt{2}} - 1 = \dfrac{2(4+\sqrt{2})}{14} - 1 =$
$= \dfrac{\sqrt{2}-3}{7} < 0.$



Ответ: $(\frac{1}{4}; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите неравенства.

31. $9^x < 3^x + 2$.

Ответ: $(-\infty; \log_3 2)$.

32. $\dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x-2}-1}$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

33. $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}}$.

Ответ: $[0; 16]$.

34. $3\cdot 4^x - 7\cdot 10^x + 2\cdot 25^x > 0$.

Ответ: $(\log_{\frac{2}{5}} 2; \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{3})$.

35. $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1$.

Ответ: $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

36. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x+2} > 2\cdot 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1}$.

Ответ: $(-\infty; 1)$.

37. $(\cos)^{\frac{x-2}{2x+1}} \leq 1$.

Ответ: $(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$, $n \neq 0$; $2\pi k$, $k \in Z$.

38. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-x} < 3$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

39. $4^x + 4^{1-x} > 4$.

Ответ: $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.

40. $\dfrac{4^x + 2^x - 3}{2^{1-x}} \le 3\cdot 8^{x-1}$.

Ответ: $(-\infty; 1]$.

41. $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-4} - 1\right)\cdot\sqrt{9-x^2} \ge 0$.

Ответ: $[-2; 2]$.

42. $(\sqrt{x} - 1)(4^x - 2^x - 2) \le 0$.

Ответ: 1.

43. $\dfrac{1}{3^x + 1} \ge \dfrac{3^x}{3^{x-1} - 1}$.

Ответ: $(-\infty; -1)\cup\{0\}$.

44. $\dfrac{4^x - 2^x - 2}{\sqrt{x+1} - 1} \ge 0$.

Ответ: $[-1; 0)\cup(1; +\infty)$.

45. $3^x < 1 + 12\cdot 3^{-x}$.

Ответ: $(-\infty; \log_3 4)$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.10. Определения, основные свойства логарифмов, формулы

1. Логарифмом числа b по данному основанию a называют показатель степени c, в которую надо возвести a, чтобы получить b. Из записи $\log_a b = c$ следует, что $a^c = b$, где $c \in R$, b – логарифмируемое число ($b > 0$), a – основание логарифма ($a > 0$, $a \ne 1$).

2. Из определения логарифма следует, что $a^{\log_a b} = b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \ne 1$), которое принято называть основным логарифмическим тождеством.

3. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел.

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \ne 1).$$

4. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b \;\; (a > 0,\, b > 0,\, c > 0,\, c \neq 1).$$

5. Логарифм степени с положительным основанием равен произведению показателя степени на логарифм основания.

$$\log_c a^k = k \cdot \log_c a \;\; (a > 0,\, c > 0,\, c \neq 1).$$

Важны следующие следствия.

Следствие 1. $\log_c(ab) = \log_c|a| + \log_c|b| \;\; (ab > 0,\, c > 0,\, c \neq 1).$

Следствие 2. $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c|a| - \log_c|b| \;\; (ab > 0,\, c > 0,\, c \neq 1).$

Следствие 3. $\log_c a^k = k \cdot \log_c|a| \;\; (a \neq 0,\, c > 0,\, c \neq 1,\, k = 2n,\, n \in Z).$

При решении логарифмических уравнений и неравенств полезно знать следующие формулы:

1. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \;\; (a > 0,\, b > 0,\, c > 0,\, c \neq 1).$
2. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \;\; (a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1,\, b \neq 1).$
3. $\log_{a^n} b^k = \dfrac{k}{n}\log_a b \;\; (a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1,\, n \neq 0).$
4. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \;\; (a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1,\, c > 0,\, c \neq 1).$
5. $a^{\log_a^2 b} = b^{\log_a b} \;\; (a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1).$
6. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}} \;\; (a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1,\, b \neq 1,\, \log_a b \geq 0).$

Все приведенные формулы являются тождествами на своей области допустимых значений, и справедливость их доказывается. Докажем, например, формулы 4 и 6.

4. $a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}.$
6. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\log_b a \cdot \sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b^2 \log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$

3.11. Задания на применение логарифмических свойств и формул

Пример 1. Вычислите: $\log_2^2 12 - \log_2^2 6 - \log_2 9.$

Решение: $\log_2^2 12-\log_2^2 6-\log_2 9=(\log_2 12-\log_2 6)(\log_2 12+\log_2 6)-$
$-\log_2 9=\log_2 2\cdot\log_2 72-\log_2 9=\log_2\frac{72}{9}=\log_2 8=\log_2 2^3=3.$

Ответ: 3.

Пример 2. Вычислите: $\log_5\frac{\sqrt[3]{5}}{125}\cdot\log_2\frac{8}{\sqrt[6]{2}}$.

Решение: Последовательно имеем:

$(\log_5\sqrt[3]{5}-\log_5 125)(\log_2 8-\log_2\sqrt[6]{2})=(\frac{1}{3}-3)(3-\frac{1}{6})=-\frac{68}{9}.$

Ответ: $-\frac{68}{9}$.

Пример 3. Вычислите: $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$.

Решение: Перейдем к логарифмам по основанию 2 во всех логарифмах, кроме первого.

$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8=$

$=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 6}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 6}\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 7}=\log_2 8=3.$

Ответ: 3.

Пример 4. Найдите значение выражения: $\log_{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{3}\cdot\log_{\sqrt{3}}4\sqrt[3]{2}$.

Решение: Первый множитель равен: $\log_{2^{3/2}}3^{1/3}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}\cdot\log_2 3=\frac{2}{9}\cdot\log_2 3.$

Второй множитель равен: $\log_{3^{1/2}}2^{7/3}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{2}}\cdot\log_3 2=\frac{14}{3}\cdot\log_3 2.$

Окончательно имеем: $\frac{2}{9}\cdot\log_2 3\cdot\frac{14}{3}\cdot\log_3 2=\frac{28}{27}$, поскольку $\log_2 3\cdot\log_3 2=1$.

Ответ: $\frac{28}{27}$.

Пример 5. Решите уравнение: $x^{\lg 2}+2^{\lg x}=4$.

Решение: $x^{\lg 2}=2^{\lg x}$, поэтому данное уравнение будет $2^{\lg x}+2^{\lg x}=4$, $2^{\lg x}=2$, $\lg x=1$, $x=10$.

Ответ: 10.

Пример 6. Вычислите: $2^{\log_2^2 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 3}$.

Решение: Последовательно будем иметь:

$$2^{\log_2^2 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2^2 3}\cdot\frac{2^{\log_2 3}}{3^{\log_2 3}} = \frac{3^{\log_2 3}\cdot 3}{3^{\log_2 3}} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 7. Показать, что $4^{\sqrt{\log_2 5}} = 25^{\sqrt{\log_5 2}}$.

Решение: Извлекая из обеих частей равенства корень квадратный, получим $\sqrt{4^{\sqrt{\log_2 5}}} = \sqrt{25^{\sqrt{\log_5 2}}}$, $2^{\sqrt{\log_2 5}} = 5^{\sqrt{\log_5 2}}$, а последнее равенство верно ввиду следствия 6 (формулы).

Пример 8. Упростить выражение: $\log_{x^2}\frac{x}{y} - \log_{x^4}\frac{x^2}{y^2}$.

Решение: Из условия видно, что $\frac{x}{y} > 0$, тогда данное выражение тождественно равно выражению $\frac{1}{2}\log_{|x|}|x| - \frac{1}{2}\log_{|x|}|y| - \frac{1}{2}\log_{|x|}|x| + \frac{1}{2}\log_{|x|}|y| = \frac{1}{2}\log_{x}|y|$.

Ответ: $\frac{1}{2}\log_{x}|y|$.

Задания для самостоятельного решения.

Вычислите (упражнения 46–51).

46. $\frac{\lg 16 + \lg 9}{\lg 64 + \lg 27}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

47. $\frac{\log_3\sqrt[3]{4} - \log_3\sqrt{2}}{\log_3\sqrt[4]{8} + 2\log_3 2}$.

Ответ: $\frac{2}{33}$.

48. $\lg 5\cdot\lg 20 + (\lg 2)^2$.

Ответ: 1.

49. $\sqrt{\log_2 6\cdot\log_2 3 + \log_2 432} - \log_2 12$.

Ответ: 0.

50. $\log_8 125 \cdot \log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{4}$.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

51. $9^{\log_2 27} - 64^{\log_2^2 3}$.

Ответ: 0.

52. Упростите выражение $\left(a^{\frac{2}{\log_b a}+1} + b^{\frac{2}{\log_a b}+1}\right) : (ab)^{\frac{1}{\log_{a+b} ab}}$.

Ответ: ab.

РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Определение: Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма, называется логарифмическим.

3.12. Решение уравнений, основанное на определении логарифма

а) Уравнение вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

Поскольку $a^b > 0$, то при x_0, таком, что $f(x_0) = a^b$, будет $f(x_0) > 0$.

б) Уравнение вида $\log_{g(x)} f(x) = b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^b(x), \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Поэтому можно решить уравнение $f(x) = g^b(x)$ и проверить при найденных корнях выполнение неравенств $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$. Проверять выполнение неравенства $f(x) > 0$ необязательно, поскольку $f(x) = g^b(x) > 0$.

Замечание: Можно решить уравнение и проверить найденные корни непосредственной подстановкой их значений в уравнение $\log_{g(x)} f(x) = b$.

Пример 1. Решите уравнение $\log_{2-x}(x^2 + 3x - 6) = 1$.

Решение: Область определения уравнения задается системой неравенств:

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 2 - x \neq 1, \\ x^2 + 3x - 6 > 0. \end{cases}$$

Применяя определение логарифма, получим $x^2 + 3x - 6 = 2 - x$, $x^2 + 4x - 8 = 0$, $x_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}$. Оба корня удовлетворяют всем неравенствам системы из области определения.

Ответ: $-2 \pm 2\sqrt{3}$.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2$.

Решение: Из данного уравнения следует, что $(2x - 3)^2 = 3x^2 - 7x + 3$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$. Корни последнего уравнения 2 и 3.

Непосредственная подстановка в исходное уравнение значения 2 дает в основании логарифма единицу, что невозможно. При $x = 3$ получаем $\log_3 9 = 2$ – верное равенство.

Ответ: 3.

Пример 3. Решите уравнение $\log_{\sin x}\cos x = 1$.

Решение: Из условия следует, что $\sin x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos x > 0$. Ясно, что x – угол первой четверти единичной окружности. Из определения логарифма следует, что $\sin x = \cos x$ – однородное уравнение, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Из полученной серии корней выбираем те значения x, которые принадлежат первой четверти, поэтому $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

53. $\log_{x-1}16 = 2$.

Ответ: 5.

54. $\log_{x+1}(x + 2) = -1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

55. $\log_{|x-1|}(2x - 1)^2 = 2$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

56. $\log_{\sin x}(1 - \cos x) = 2$.

Ответ: корней нет.

57. $\log_3(\log_3^2(2x + 3)) = 1$.

Ответ: $-1\frac{13}{27}$; 12.

58. $x^{\log_x(x-1)} = (3x + 2)^2$.

Ответ: корней нет.

3.13. Уравнения, решаемые логарифмированием

К таким уравнениям относят уравнения, содержащие неизвестное в основаниях логарифмов и показателях степеней выражений, содержащих логарифмы.

Пример 1. Решите уравнение $x^{\log_2 x - 1} = 8x$.

Решение: Область определения уравнения задается неравенством $x > 0$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2, получим $\log_2(x^{\log_2 x - 1}) = \log_2(8x)$, $(\log_2 x - 1)\log_2 x = 3 + \log_2 x$.

Полагая далее $\log_2 x = t$, получаем квадратное уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, корни которого -1 и 3.

Значит, $\log_2 x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ и $\log_2 x = 3$, $x = 8$.

Ответ: $\frac{1}{2}$, 8.

Примечание: Укажем еще один способ решения данного уравнения. Положим $\log_2 x = t$, тогда $x = 2^t$, и исходное уравнение примет вид $2^{t(t-1)} = 2^3 \cdot 2^t$, откуда $t^2 - 2t - 3 = 0$ и т. д.

Логарифмированием обеих частей удобно решать показательные уравнения.

Пример 2. Решите уравнение $3^{x^2} \cdot 2^x = 6$.

Решение: Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3 (можно 2 или 6), получим $x^2 + x \cdot \log_3 2 = 1 + \log_3 2$, $(x^2 - 1) +$

$+ (x-1)\log_3 2 = 0.$ $(x-1)(x+1+\log_3 2) = 0$, откуда $x = 1$ или $(x+1+$ $+\log_3 2) = 0$.

Последнее уравнение будет иметь вид

$x = -(\log_3 3 + \log_3 2) = -\log_3 6 = \log_3 \frac{1}{6}$.

Ответ: $1, \log_3 \frac{1}{6}$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

59. $x^{\log_3 x} = 9x$.

Ответ: $\frac{1}{3}, 9$.

60. $\frac{6^{x^2}}{3^x} = 2$.

Ответ: $1, \log_6 0{,}5$.

61. $4^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 50$.

Ответ: $\log_5 0{,}5, 2$.

3.14. Логарифмические уравнения, решаемые потенцированием

После приведения к виду $\log_{p(x)} f(x) = \log_{p(x)} g(x)$ переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1. \end{cases}$$

Из двух неравенств $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ можно оставить только одно – наиболее выгодное для решающего.

Примечание: Можно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выполнить проверку.

Пример 1. Решите уравнение $\log_3(x-2) - \log_3(x+4) = \log_3 x -$ $-\log_3 15$.

Решение: Найдем область определения уравнения, решив систему

$$\begin{cases} x+4>0, \\ x-2>0, \\ x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \ x>2.$$

Для удобства решения перепишем уравнения в виде

$$\log_3(x-2)+\log_3 15=\log_3(x+4)+\log_3 x,$$
$$\log_3 15(x-2)=\log_3 x(x+4),$$
$$15(x-2)=x(x+4),$$
$$x^2-11x+30=0,$$
$$x=5 \text{ или } x=6.$$

Оба найденных корня удовлетворяют неравенству $x>2$.

Ответ: 5; 6.

Пример 2. Решите уравнение $\log_2 3 + \log_2\log_3(x+2) = \log_2\log_3(10x+17)$.

Решение: Чтобы найти область определения уравнения, необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_3(x+2)>0, \\ \log_3(10x+17)>0, \\ x+2>0, \\ 10x+17>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>1, \\ 10x+17>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x>-1{,}6; \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$$

Запишем исходное уравнение в виде

$$\log_2(3\cdot\log_3(x+2))=\log_2\log_3(10x+17),$$
$$3\log_3(x+2)=\log_3(10x+17),$$
$$x^3+6x^2+2x-9=0.$$

Последнее уравнение имеет очевидный корень $x=1$.

Разложим левую часть уравнения на множители $x^3+6x^2+2x-9 = x^3-1+6x^2-6+2x-2=(x-1)(x^2+x+1+6x+6+2)=0$, $x=1$ или $x^2+7x+9=0$, $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$.

Оба корня квадратного уравнения не удовлетворяют неравенству $x>-1$.

Ответ: 1.

Пример 3. Решите уравнение $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\sin x}(\cos x+\frac{1}{2})=\log_{\sin x}\frac{1}{2}$.

Решение: В этом уравнении корни должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

Ясно, что x – угол первой четверти единичной окружности. После потенцирования получаем уравнение $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, откуда

$\cos x = -1$ (не удовлетворяет условию $\cos x > 0$),

$\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Так как x – угол первой четверти, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

62. $\log_6(x + 4) = \log_6(2x^2 - 5) - \log_6 x$.
Ответ: 5.

63. $2x - 1 - \log_3(2\cdot 3^x - 9) = \log_3(3^x - 6)$.
Ответ: 2.

64. $\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x + \lg 25$.
Ответ: $\log_2\frac{3}{5}$, $\log_2\frac{2}{5}$.

65. $1 + \log_2\frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}(x-2)^2$.
Ответ: $1 + \sqrt{7}$; $-1 \pm \sqrt{3}$.
Замечание: Не забудьте, что $\log_a x^{2k} = 2k\log_a|x|$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \neq 0$.

66. $\log_2^2\frac{x+1}{x-2} + \log_2\frac{x-2}{x+1} = \log_2^2\frac{x-1}{x+2} + \log_2\frac{x+2}{x-1}$.
Ответ: $\pm\sqrt{7}$.
Указание: Заметим, что $\log_c^2\frac{a}{b} = \log_c^2\frac{b}{a}$ ($\frac{a}{b} > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$).

67. $\log_3\log_{\sqrt{2}}x + 2\log_{\frac{1}{9}}\log_2\left(2x - \frac{5}{9}\right) = 0$.
Ответ: $\frac{5}{3}$.

3.15. Решение уравнений вида $f(\log_a g(x)) = 0$, где $f(x)$ – некоторая функция

При решении таких уравнений выполняется замена $\log_a g(x) = t$, тогда $\log_a g(x) = t_i$, где t_i – корни уравнения $f(t) = 0$. Необходимо помнить, что $a > 0$, $a \neq 1$.

Аналогично решаются уравнения вида $f(\log_{m(x)} g(x)) = 0$, однако здесь, в отличие от уравнения $f(\log_a g(x)) = 0$, необходимо учитывать область определения или выполнять проверку.

Пример 1. Решите уравнение $2\lg^2 x^2 - \lg x^6 - 2 = 0$.

Решение. $\lg^2 x^2 = 4\lg^2|x|$; $\lg x^6 = 6\lg|x|$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $8\lg^2|x| - 6\lg|x| - 2 = 0$ или уравнению $4\lg^2|x| - 3\lg|x| - 1 = 0$. Ясно, что $\lg|x| = 1$ или $\lg|x| = -\frac{1}{4}$. Корни уравнения $x = \pm 10$ или $x = \pm 10^{-0{,}25}$.

Ответ: ± 10; $\pm 10^{-0{,}25}$.

Пример 2. Решите уравнение $3\lg x^2 - \lg^2(-x) - 5 = 0$.

Решение. Найдем область определения уравнения: $x < 0$. Тогда $\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg(-x)$, и получим уравнение $\lg^2(-x) - 6\lg(-x) + 5 = 0$.

$\lg(-x) = 5$ или $\lg(-x) = 1$, $x = -10^5$ или $x = -10$.

Ответ: -10^5; -10.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

68. $2\lg^2 x + \lg x^2 = 2\lg(10x)$.

Ответ: 10, $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

69. $2\sqrt{\log_2 x} + \log_2(4x) - 10 = 0$.

Ответ: 16.

70. $\log_3^2(9x) + \log_3^2(3x) = 2 - \log_3\frac{1}{x}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

71. $\lg(100x)\cdot\lg x^2 = 6$.

Ответ: 10; 0,001.

3.16. Решение логарифмических уравнений с помощью формул перехода от одного основания логарифма к другому

Для перехода от логарифма с одним основанием к другому будем применять формулы:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1). \qquad (1)$$

Если в этой формуле положить $c = b$, то получим

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1). \qquad (2)$$

Ясно, что $\log_a b$ и $\log_b a$ – взаимно обратные числа.

$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$. Итак, получена еще одна полезная формула:

$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b \quad (a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ k \neq 1). \qquad (3)$$

Покажем применение этих формул при решении логарифмических уравнений.

Пример 1. Решите уравнение: $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 3\frac{2}{3}$.

Решение:

1) Ясно, что область определения уравнения определяется неравенством $x > 0$. Используя формулу (3), получим

$$\frac{\log_2 x}{3} + \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = \frac{11}{3};$$

$$\log_2 x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{11}{3};$$

$$\log_2 x = 2;$$

$$x = 4.$$

2) А ели не вспомнил формулу? Тогда можно поступить и так: положим $\log_2 x = t$, $t > 0$; $x = 2^t$, и исходное уравнение примет вид

$$\log_8 2^t + \log_4 2^t + t = \frac{11}{3};$$

$$t\log_8 2 + t\log_4 2 + t = \frac{11}{3};$$

$$t\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{11}{3};$$
$$t=2,\ x=4.$$

Ответ: 4.

Пример 2. Решите уравнение: $\sqrt{\log_x(4x)}\cdot\log_2 x=2\sqrt{2}$.

Решение:

1) Нахождение области определения данного уравнения довольно трудоемко, поэтому решим уравнение и сделаем проверку.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sqrt{\log_x(4x)}\cdot\log_2 x=\sqrt{\log_x 4+1}\cdot\log_2 x=\sqrt{\frac{2}{\log_2 x}+1}\cdot\log_2 x;$$

$$\sqrt{\frac{2}{\log_2 x}+1}\cdot\log_2 x=2\sqrt{2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $\log_2^2 x+$ $+2\log_2 x-8=0$, откуда $\log_2 x=-4$; $\log_2 x=2$, $x=\frac{1}{16}$, $x=4$.

Проверка.

$x=\frac{1}{16}$; $\sqrt{\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{4}}\cdot\log_2\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\cdot(-4)=-2$, $-2\neq 2\sqrt{2}$.

$x=4$; $\sqrt{\log_4 16}\cdot\log_2 4=2\sqrt{2}$ – получаем верное равенство.

2) Положим $\log_2 x=t$, $t>0$; $x=2^t$, тогда исходное уравнение примет вид

$\sqrt{\log_2(4\cdot 2^t)}\cdot t=2\sqrt{2}$; $\sqrt{1+\frac{2}{t}}\cdot t=2\sqrt{2}$; $t^2+2t-8=0$, откуда $t=-4$, $t=2>0$. $x=2^2=4$.

Ответ: 4.

Пример 3. Решите уравнение $\log_5 x+\log_{\frac{1}{x}}\frac{1}{5}=\log^2_{\frac{1}{5}}\frac{1}{x}+\log^2_x 5-\frac{7}{4}$.

Решение: Область определения уравнения задается объединением двух промежутков: $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. Заметим, что $\log_{\frac{1}{x}}\frac{1}{5}=\log_{x^{-1}}5$ и $\log^2_{\frac{1}{5}}\frac{1}{x}=\log^2_5 x$, поэтому исходное уравнение примет вид

$$\log_5 x+\log_x 5=\log_5^2 x+\log_x^2 5-\frac{7}{4};\ \log_5 x+\log_x 5=(\log_5 x+\log_x 5)^2-2-\frac{7}{4}.$$

Далее, положив $\log_5 x + \log_x 5 = t$, получим уравнение $t^2 - t - \frac{15}{4} = 0$, $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{5}{2}$.

Остается решить уравнения $\log_5 x + \log_x 5 = -\frac{3}{2}$ и $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$.

Первое уравнение корней не имеет. Решение второго уравнения дает $\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2 + \frac{1}{2}$, откуда $\log_5 x = 2$, $\log_5 x = 0{,}5$.

Ответ: 25; $\sqrt{5}$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_{4x}\frac{8}{x} + \log_8^2 2x = \frac{10}{9}$.

Решение: Область определения уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{4}. \end{cases}$

Перейдем в логарифмах к основанию 2, воспользовавшись формулой (1):

$$\frac{\log_2\frac{8}{x}}{\log_2 4x} + \frac{\log_2^2 2x}{9} = \frac{10}{9};\ \frac{3 - \log_2 x}{2 + \log_2 x} + \frac{(1 + \log_2 x)^2}{9} = \frac{10}{9}.$$

Обозначив $\log_2 x = t$, получим уравнение $\frac{3-t}{2+t} + \frac{(1+t)^2}{9} - \frac{10}{9} = 0$, которое после преобразований примет вид $t^3 + 4t^2 - 14t + 9 = 0$. Это уравнение имеет очевидный корень $t = 1$. Далее получаем $t^3 + 4t^2 - 14t + 9 = (t-1)(t^2 + 5t - 9) = 0$; $t^2 + 5t - 9 = 0$; $t = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$.

Значит, $\log_2 x = 1$ и $x = 2$ или $\log_2 x = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$ и $x = \sqrt{2^{-5\pm\sqrt{61}}}$.

Ответ: 2; $\sqrt{2^{-5\pm\sqrt{61}}}$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

72. $\log_x(25x) + \log_5 x = 2{,}5$.

Ответ: 5; $\sqrt{5}$.

73. $\log_8^2 x + \log_{16}^2 x + \log_4^2 x = 61$.

Ответ: $2^{\pm 12}$.

74. $\log_{x^2}2 + \log_{x^4}2 + \log_{|x|}2 = 1.$

Ответ: $\pm 2\sqrt[4]{8}$.

75. $\log_x 3 + \log_9 x - 1{,}5 = 0.$

Ответ: 3; 9.

76. $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{9}} 3 = \log_{\frac{x}{27}} 9.$

Ответ: 3; $3\sqrt{3}$.

77. $2\log_3 \dfrac{x^2}{27} - \dfrac{\log_3 \frac{1}{x}}{\log_5 \sqrt{x}} = 2.$

Указание. Использовать $\dfrac{\log_3 x}{\log_5 x} = \log_3 5.$

Ответ: $\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

3.17. Уравнения, содержащие логарифм в показателе степени

Такие уравнения решают логарифмированием обеих частей уравнения по одному и тому же основанию. Как правило, выбирают основание, содержащееся в основании степени логарифма. Мы укажем и другой способ решения подобных уравнений – он состоит во введении новой переменной.

Пример. Решите уравнение: $x^{\lg x + 1} = 10^6$.

Решение: Область определения уравнения устанавливается неравенством $x > 0$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим $\lg(x^{\lg x + 1}) = \lg 10^6$. $(\lg x + 1)\lg x = 6$. Полагая далее $\lg x = t$, получим уравнение $t^2 + t - 6 = 0$, корни которого –3 и 2, но тогда $\lg x = 2$ и $x = 100$, или $\lg x = -3$ и $x = 10^{-3}$.

Теперь решим это уравнение, сведя его к показательному, для этого положим $\lg x = t$, то есть $x = 10^t$. Исходное уравнение примет вид $10^{t(t+1)} = 10^6$. Из последнего уравнения следует $t(t + 1) = 6$, $t^2 + t - 6 = 0$, а дальнейшее решение уже было рассмотрено.

Ответ: 100; 10^{-3}.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

78. $x \cdot 2^{\log_x 2} = 4$.

Ответ: 2.

79. $x^{\lg^2 x} = 10x^3$.

Ответ: 0,1; $\sqrt{10^{1\pm\sqrt{3}}}$.

3.18. Решение уравнений, основанное на применении некоторых логарифмических тождеств

1. Известно, что $\log_{a^n} b^k = \frac{k}{n} \cdot \log_a b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $n \neq 0$). Если n и k – четные числа, то формула примет вид $\log_{a^n} b^k = \frac{k}{n} \cdot \log_{|a|} |b|$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq \pm 1$, $n \neq 0$).

Пример 1. Решите уравнение $2\log_{x^2}(x^2 - 3x) = 1$.

Решение: Областью определения уравнения является множество $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$. Данное уравнение равносильно уравнению $\log_{|x|}(x^2 - 3x) = 1$, или $x^2 - 3x = |x|$. Далее имеем две системы:

$$\begin{cases} x < -1, \\ x < -1, \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а решением второй системы является $x = 4$.

Покажем еще один способ решения исходного уравнения. Из данного уравнения следует, что $\log_{x^2}(x^2 - 3x)^2 = 1$; тогда $(x^2 - 3x)^2 = x^2$.

$(x^2 - 4x)(x^2 - 2x) = 0$. $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$, но только последнее значение входит в область определения уравнения.

Ответ: 4.

Пример 2. Решите уравнение $\log_3(x - 1) + \log_9(x - 2)^2 = \log_3 2 - 2$.

Решение: Область определения уравнения задается условиями: $x > 1$, $x \neq 2$. Данное уравнение равносильно уравнению $\log_3((x - 1)|x - 2|) = \log_3 \frac{2}{9}$, откуда $(x - 1)|x - 2| = \frac{2}{9}$.

Для нахождения x имеем две системы:

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x^2 - 3x + \dfrac{20}{9} = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 3x + \dfrac{16}{9} = 0. \end{cases}$$

Первая система дет $x = 1\frac{2}{3}$ и $x = 1\frac{1}{3}$, а последняя система имеет только один корень $x = \dfrac{9 + \sqrt{17}}{6}$.

Ответ: $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $\dfrac{9 + \sqrt{17}}{6}$.

2. Покажем применение формул:

$\log_c(ab) = \log_c|a| + \log_c|b|$ $(ab > 0, c > 0, c \neq 1)$.

$\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c|a| - \log_c|b|$ $(ab > 0, c > 0, c \neq 1)$.

Пример 3. Решите уравнение $\log_2 x(x-1) = \log_2^2|x-1| - \log_2^2|x|$.

Решение: Область определения уравнения $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Согласно первой из приведенных формул, $\log_2|x| + \log_2|x-1| - (\log_2^2|x-1| - \log_2^2|x|) = 0$, откуда имеем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \log_2|x| + \log_2|x-1| = 0, \\ \log_2|x-1| - \log_2|x| = 1. \end{array}\right.$$

Решим первое уравнение: $|x^2 - x| = 1$; $x^2 - x - 1 = 0$; $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Оба полученных корня являются решением данного уравнения.

Решим второе из полученных уравнений: $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = 2$. Это уравнение распадается на два уравнения: $\dfrac{x-1}{x} = 2$ или $\dfrac{x-1}{x} = -2$, корни которых -1 и $\frac{1}{3}$. Из полученных корней только $-1 \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: -1; $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите уравнения.

80. $x^{\log_3 5} + 5^{\log_3 x} = 6$.

Ответ: $3^{\log_5 3}$.

81. $9^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 3} = 15.$
Ответ: 2.

82. $x^{2\log_x^2 3} + 3^{\log_x 3 - 1} = 18.$
Ответ: 3.

83. $\log_2(64 - 3x^{\log_2 x}) = \log_2^2 x.$
Ответ: 0,25; 4.

РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

3.19. Простейшие логарифмические неравенства

1. $\log_a x > b$ при $a > 1$ имеет решение $x \in (a^b; +\infty)$, а при $0 < a < 1$ $x \in (0; a^b)$;

$\log_a x < b$ при $a > 1$ имеет решение $x \in (0; a^b)$, а при $0 < a < 1$ $x \in (a^b; +\infty)$.

2. $\log_a f(x) > b$ при $a > 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \ge a^b. \end{cases}$

Для получения ответа достаточно решить только второе неравенство системы, так как $f(x) \ge a^b > 0$, а при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

Неравенство $\log_a f(x) < b$ при $a > 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

При $0 < a < 1$ данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > a^b. \end{cases}$ Опять достаточно решить только второе неравенство.

3. Неравенства $\log_{f(x)} \varphi(x) \ge a$ и $\log_{f(x)} \varphi(x) \le a$ равносильны системам:

$$\log_{f(x)} \varphi(x) \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) \ge f^a(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < \varphi(x) < f^a(x). \end{cases} \end{array} \right. \qquad \log_{f(x)} \varphi(x) \le a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) \ge f^a(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < \varphi(x) \le f^a(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

4. $\log_{f(x)} g(x) \ge \log_{f(x)} h(x)$ сводится к совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) > 1,\\ g(x) \ge h(x),\\ h(x) > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}0 < f(x) < 1,\\ g(x) \le h(x),\\ g(x) > 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Аналогичные рассуждения приводятся для неравенства $\log_{f(x)} g(x) \le \log_{f(x)} h(x)$.

Пример 1. Решите неравенство $\log_2 \log_4 \frac{x+3}{2-x} > -1$.

Решение: Так как $D(\log_2) = R_+$, $\log_4 \frac{x+3}{2-x} > 0$, $\log_2 \log_4 \frac{x+3}{2-x} > \log_2 \frac{1}{2}$. Поскольку функция $y = \log_2 t$ – возрастающая, $\log_4 \frac{x+3}{2-x} > \frac{1}{2}$.

Итак, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\log_4 \frac{x+3}{2-x} > \frac{1}{2},\\ \log_4 \frac{x+3}{2-x} > 0;\end{cases} \Leftrightarrow \log_4 \frac{x+3}{2-x} > \frac{1}{2}.$$

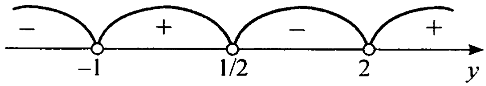
Опуская подробные, аналогичные сделанным выше, обоснования, приходим к системе неравенств $\begin{cases}\frac{x+3}{2-x} > 0,\\ \frac{x+3}{2-x} > 2.\end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x} > 2 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2-x} > 0.$

Применяя к последнему неравенству метод интервалов, получим: $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{\lg^2 x + \lg x - 3}{2\lg x - 1} < 1$.

Решение: Положим $\lg x = y$, получим неравенство $\frac{y^2 + y - 3}{2y - 1} - 1 < 0$, которое равносильно $\frac{y^2 + y - 3 - 2y + 1}{2y - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - y - 2}{2y - 1} < 0$. Решаем последнее неравенство методом интервалов:



Итак, $y < -1$ и $\lg x < -1$, тогда $0 < x < 0{,}1$; $\frac{1}{2} < y < 2$; $\frac{1}{2} < \lg x < 2$; $\sqrt{10} < x < 100$.

Ответ: $(0;\ 0{,}1) \cup (\sqrt{10};\ 100)$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_{x+1}(x^3 + 3x^2 + 2x) < 2$.

Решение: Данное неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 > 1, \\ x^3 + 3x^2 + 2x > 0, \\ x^3 + 3x^2 + 2x < (x + 1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x + 1 < 1, \\ x^3 + 3x^2 + 2x > (x + 1)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

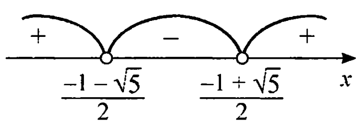
Решаем первую систему: $\begin{cases} x > 0, \\ x(x^2 + 3x + 2) > 0, \\ x^3 + 2x^2 - 1 < 0. \end{cases}$

Второе неравенство выполняется при любом $x > 0$.

Решаем третье неравенство системы:

$$x^3 + 1 + 2x^2 - 2 < 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - x + 1) + 2(x + 1)(x - 1) < 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x - 2) < 0;$$
$$(x + 1)(x^2 + x - 1) < 0.$$

Поскольку $x > 0$, $x + 1 > 0$, остается решить неравенство $x^2 + x - 1 < 0$:



Так как $x > 0$, то $0 < x < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Решение второго неравенства второй системы известно (см. рисунок), а так как $-1 < x < 0$, то система решений не имеет.

Ответ: $\left(0;\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите неравенства.

84. $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$.

Ответ: $(-1; 1)\cup(3; 5)$.

85. $\dfrac{\lg^2 x - 4\lg x + 5}{2\lg x - 3} < 1$.

Ответ: $(0; 10\sqrt{2})\cup(100; 10000)$.

86. $x^{\lg(x^2 - 6x + 5)} > 1$.

Ответ: $(3 - \sqrt{5}; 1)\cup(3 + \sqrt{5}; +\infty)$.

87. $\log_x \dfrac{2x}{|x-3|} \leq \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $[5; +\infty)$.

88. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} > 2$.

Ответ: $(0; 0{,}25)\cup(4; +\infty)$.

89. $2^x \cdot 3^{x^2} \leq 6$.

Ответ: $[-\log_3 6; 1]$.

3.20. Решение логарифмических неравенств методом интервалов

При решении логарифмических неравенств, представляемых, например, в виде $f(x) > 0$, методом интервалов находят:

а) область определения функции $f(x)$;

б) нули функции, разбивающие область определения на промежутки, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак,

и записывают ответ.

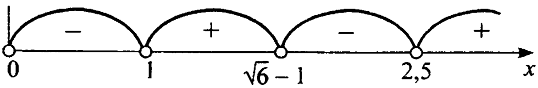
Пример 1. Решите неравенство $\log_3\sqrt{5 - 2x}\cdot\log_x 3 - 1 < 0$.

Решение: Введем функцию $f(x) = \log_3\sqrt{5 - 2x}\cdot\log_x 3 - 1$. Найдем ее область определения: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 5 - 2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 2{,}5. \end{cases}$

Итак, $D(f)$: $(0; 1)\cup(1; 2{,}5)$.

Находим нули функции: $\log_3\sqrt{5 - 2x}\cdot\log_x 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3\sqrt{5-2x}}{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5-2x} = x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0;\ x = -1 \pm \sqrt{6} -$$
посторонний корень.



$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\log_3\frac{\sqrt{13}}{3} - 1 < 0;\ f(1,4) > 0;\ f(2) < 0.$

Ответ: $(0;\ 1)\cup(\sqrt{6}-1;\ 2{,}5)$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{0,3}(x^2 - x^2 - 20) - \log_{0,3}(x+4) > 0$.

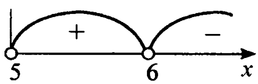
Решение: Найдем область определения функции

$f(x) = \log_{0,3}(x^2 - x^2 - 20) - \log_{0,3}(x-4)$, решив систему неравенств:

$$\begin{cases}(x-5)(x+4) > 0, \\ x + 4 > 0;\end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Определим нули функции, решив уравнение $(x^2 - x^2 - 20) - (x+4) = 0$; $(x-5)(x+4) - (x+4) = 0$; $(x+4)(x-6) = 0$.

При $x > 5$ корнем уравнения является $x = 6$.



Ответ: $(5;\ 6)$.

Задания для самостоятельного решения.

Решите неравенства.

90. $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \le 1.$

Ответ: $\left(-\frac{1}{5};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{7};\ \frac{2}{7}\right)\cup\left[\frac{19}{49};\ +\infty\right)$.

91. $\log_x 2 \le \log_{\sqrt{x+2}} 2.$

Ответ: $(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

92. $\log_2(x+1) < 1 - 2\log_4 x.$

Ответ: $(0;\ 1)$.

93. $\log_3\log_{27}\log_2(x^2 + x + 2) \le -1.$

Ответ: $[-3;\ -1)\cup(0;\ 2)$.

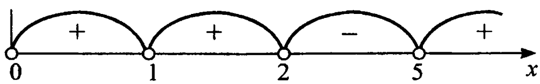
3.21. Об одном способе решения логарифмических неравенств

Можно доказать свойство: $\log_a b$ и $(a-1)(b-1)$ имеют один и тот же знак.

Пример. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{x}} \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \geq 1$.

Решение: Находим область определения функции, в левой части неравенства, решив систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{x-2}{x-5} > 0. \end{cases}$$



$D(f)$: $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (5;\ +\infty)$.

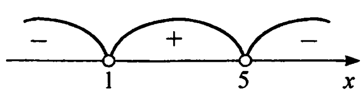
Запишем исходное неравенство в виде $\log_{\frac{1}{x}} \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \geq \log_{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x}$

или $\log_{\frac{1}{x}} \dfrac{2(x-2)x}{(x+1)(x-5)} \geq 0$ и воспользуемся приведенным выше свойством.

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)}-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \cdot \frac{2x^2-4x-x^2+5x-x+5}{(x+1)(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)(x^2+5)}{x(x+1)(x-5)} \geq 0.$$

С учетом области определения $x > 0$, $x + 1 > 0$, $x^2 + 5 > 0$ последнее неравенство можно записать в виде $\dfrac{1-x}{x-5} \geq 0$.



Так как $x \neq 1$, то получаем $x \in (1;\ 5)$. С учетом области определения функции получаем $(1;\ 2)$.

Ответ: $(1;\ 2)$.

Задания для самостоятельного решения.
Решите неравенства.

94. $\log_{3x+2}x < 1$.
Ответ: $(0; +\infty)$.

95. $\log_{2x-x^2}(x-1{,}5)^4 > 0$.
Ответ: $(0{,}5; 1)\cup(1; 1{,}5)\cup(1{,}5; 2)$.

96. $\log_x\sqrt{x+12} < 1$.
Ответ: $(0; 1)\cup(4; +\infty)$.

3.22. Решение логарифмических уравнений и неравенств с применением подстановок

Пример 1. Решите неравенство $x^{\log_2 x} > 4x$.

Решение: Пусть $x = 2^t$, тогда $2^{t^2} > 4\cdot 2^t$, $t^2 > t+2$, $t^2 - t - 2 > 0$, $t > 2$ и $t < -1$. Ясно, что $x > 4$ и $0 < x < \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right)\cup(4; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 6$.

Решение: Полагая $x = 3^t$, получим неравенство $3^{t^2} + 3^{t^2} < 6$, $3^{t^2} < 3$, $t^2 < 1$, $-1 < t < 1$. Далее решаем неравенство $-1 < \log_3 x < 1$ и получаем $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

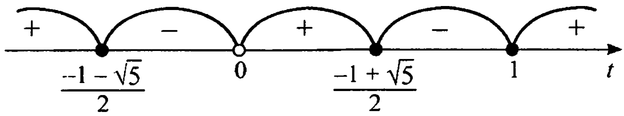
Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $x^{\lg x}\cdot 2^{\log_x 10} \ge 4\cdot 5^{\lg^2 x}$.

Решение: Заметим, что $\log_x 10 = \frac{1}{\lg x}$, тогда $x^{\lg x}\cdot 2^{\frac{1}{\lg x}} \ge 4\cdot 5^{\lg^2 x}$.

Применим подстановку $x = 10^t$, тогда $10^{t^2}\cdot 2^{\frac{1}{t}} \ge 4\cdot 5^{t^2}$.

Сокращая обе части неравенства на $5^{t^2} > 0$, получим $2^{t^2+\frac{1}{t}} \ge 2^2$, $t^2 + \frac{1}{t} - 2 \ge 0$, $\frac{t^3 - 2t + 1}{t} \ge 0$, $\frac{t^3 - t - (t-1)}{t} \ge 0$, $\frac{(t-1)(t^2+t-1)}{t} \ge 0$. Решим неравенство методом интервалов, для этого найдем нули числителя и знаменателя: $t = 0$, $t = 1$, $t^2 + t - 1 = 0$, $t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.



$t \le \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $0 < t \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t \ge 1$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

Ответ: $\left(0;\ 10^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right] \cup \left(1;\ 10^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right] \cup [10;\ +\infty)$.

3.23. Различные виды неравенств и их решения[1]

Пример 1. Решите неравенство $\frac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8} \le 1$.

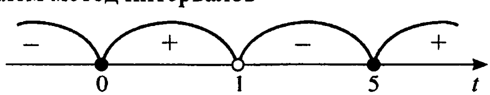
Решение: Находим область определения неравенства. Очевидно, что $x > 0$ и $0,125x \ne 1$, то есть $x \ne 8$.

Переходим во всех логарифмах к основанию 2:

$$\frac{(1+\log_2 x)\cdot\frac{1}{\log_2 x - 1}}{\frac{3}{\log_2\left(\frac{1}{8}x\right)}} \le 1,\quad \frac{1+\log_2 x}{\log_2 x - 1}\cdot\frac{\log_2 x - 3}{3} \le 1.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\frac{1+t}{t-1}\cdot\frac{t-3}{3} - 1 \le 0$, $\frac{t-3+t^2-3t-3t+3}{3(t-1)} \le 0$, $\frac{t^2-5t}{3(t-1)} \le 0$.

Применяем метод интервалов



$t \le 0$, $1 < t \le 5$.

Возвращаясь к старой неизвестной, получим $\log_2 x \le 0$, $1 < \log_2 x \le 5$ и $0 < x \le 1$, $2 < x < 8$, $8 < x \le 32$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup (2;\ 8) \cup (8;\ 32]$.

[1] В данный раздел включены неравенства, подобные предлагавшимся на ЕГЭ или в диагностических работах.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3} \geq 1$.

Решение: Находим область определения неравенства

$\begin{cases} 7-6x>0, \\ 2-x>0, \\ 2-x \neq 1. \end{cases}$ Решением системы является $(-\infty;\ 1)\cup\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Из исходного неравенства имеем $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}}\cdot\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} \geq 1$,

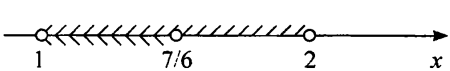
$\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{2\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} \geq 1$, $\log_{2-x}(7-6x) \geq 2$, $\log_{2-x}(7-6x) \geq \log_{2-x}(2-x)^2$.

Рассмотрим две ситуации:

1) $\begin{cases} 2-x>1, \\ 7-6x \geq (2-x)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x^2+2x-3 \leq 0. \end{cases}$

С учетом области определения получаем: $[-3;\ 1)$.

2) $\begin{cases} 0<2-x<1, \\ 7-6x \leq (2-x)^2; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} 1<x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3, \\ x>1. \end{array}\right. \end{array}\right.$



$(1;\ \frac{7}{6}]$.

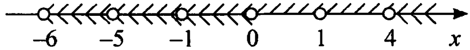
Ответ: $[-3;\ 1)\cup(1;\ \frac{7}{6}]$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{\log_{x+6}(x^2-4x)}{\log_{x+6}x^2} \geq 1$.

Решение: Находим область определения неравенства, для чего решим систему:

$\begin{cases} x+6>0, \\ x+6 \neq 1, \\ x^2-4x>0, \\ \log_{x+6}x^2 \neq 0; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} x>-6, \\ x \neq -5, \\ \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>4. \end{array}\right. \\ x \neq \pm 1. \end{array}\right.$

На координатной прямой находим общее решение системы.



$x \in (-6; -5) \cup (-5; -1) \cup (-1; 0) \cup (4; +\infty)$.

Исходное неравенство перепишем в виде $\log_{|x|}(x^2 - 4x) \ge \log_{|x|}|x|^2$.

Здесь вновь рассматриваем две системы:

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ x^2 - 4x \ge |x|^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ 0 < x^2 - 4x \le |x|^2. \end{cases}$$

Решаем первую систему. Пусть $x \ge 0$, тогда из первого неравенства $x > 1$ и $-4x \ge 0$, $x \le 0$ – решений нет.

Пусть $x < 0$, тогда $x < -1$ и $-4x \ge 0$, $x \le 0$. Общее решение $x < -1$.

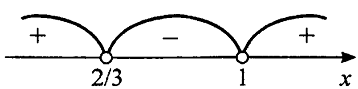
С учетом области определения имеем: $(-6; -5) \cup (-5; -1)$.

Решаем вторую систему. Первое неравенство имеет решение $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, а второе неравенство $x > 4$. Ясно, что вторая система решений не имеет.

Ответ: $(-6; -5) \cup (-5; -1)$.

Пример 4. Решите неравенство $\log_2 \dfrac{3x-2}{x-1} + \log_2 \dfrac{(x-1)^3}{3x-2} < 1$.

Решение: Так как $D(\log_2) = R_+$, то $\dfrac{3x-2}{x-1} > 0$. Решаем неравенство методом интервалов.



$x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

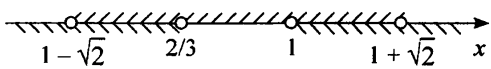
Перепишем данное неравенство, применяя свойства логарифмов.

$\log_2|3x-2| - \log_2|x-1| + \log_2|x-1|^3 - \log_2|3x-2| < 1$,

$-\log_2|x-1| + 3\log_2|x-1| < 1$, $2\log_2|x-1| < 1$, $\log_2|x-1| < \log_2\sqrt{2}$,

$|x-1| < \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

Находим общее решение:



Ответ: $\left(1 - \sqrt{2}; \dfrac{2}{3}\right) \cup (1; 1 + \sqrt{2})$.

Задания для самостоятельного решения.
Решите неравенства и системы неравенств.

97. $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x} - \frac{1}{2^{1+\lg x}}\right) \geq -1 + \lg x.$

Ответ: $(0,1; 0,5)$.

98. $\log_{\frac{1}{7}}\left(2^{1+\log_{14} x} - \frac{1}{7^{1-\log_{14} x}}\right) \geq 1 + \log_{14} x.$

Ответ: $\left(\frac{1}{14}; \frac{1}{7}\right]$.

99. $\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3\frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

Ответ: $(2; \log_2 11)$.

100. $\log_{x+1}(x^2 + 3x - 10) > 2.$

Ответ: $(11; +\infty)$.

101. $\frac{\log_{9x^2}729}{\log_{9x^2}(-9x)} \leq \frac{1}{\log_9\log_{\frac{1}{9}}9^x}.$

Ответ: $[-3; -2)\cup(-2; -1)\cup\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

102. $\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40.$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup(\sqrt[3]{2}; +\infty)$.

103. $\log_{2x^2}(x-1)^2 + \log_{(x-1)^2}2x^2 \leq 2.$

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$.

104. $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \geq 5\log_2 x. \end{cases}$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3}; 4]\cup[8; +\infty)$.

105. $\log_x\frac{6-5x}{4x+5} > 1.$

Ответ: $(0,5; 1)$.

106. $\begin{cases} 9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \le \dfrac{2}{3}, \\ \log_2^2 x + 5\log_2 x + 6 > 0. \end{cases}$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

107. $\begin{cases} 3^{4x-1} + 3^{4x+1} \ge 80, \\ \log_{\frac{x}{2}}(4x^2 - 3x + 1) \ge 0. \end{cases}$

Ответ: $\left[\dfrac{\log_3 24}{4};\ \dfrac{3}{4}\right] \cup (2;\ +\infty)$.

108. $\dfrac{\log_x(2x^2)\cdot\log_{2x} x}{\log_x(8x)} \le 1$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{8};\ 2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right] \cup \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right) \cup \left(1;\ 2^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right]$.

109. $(2x + 1)\log_5 10 + \log_5(4^x - 0{,}1) \le 2x - 1$.

Ответ: $(0{,}5\log_2 0{,}1;\ 0{,}5\log_2 0{,}2]$.

110. $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \le 6, \\ x^{\lg x - 1} \le 100. \end{cases}$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{3};\ 3\right]$.

111. $\dfrac{x + 1}{3 - \log_3(9 - 3^{-x})} \le 1$.

Ответ: $\left(-2;\ \log_3 \dfrac{10}{9}\right]$.

112. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2 - 1)} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$.

Ответ: $(1;\ +\infty)$.

113. $\begin{cases} x^2\log_{16} x \ge \log_{16} x^5 - x\log_2 x, \\ 4^x + 4^{-x} \ge \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

Ответ: $[5;\ +\infty)$.

114. $\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \ge \log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5 - x}$.

Ответ: $(-2;\ -1) \cup (3;\ 15]$.

Задания уровня С4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

4.1. Формулы площади треугольника

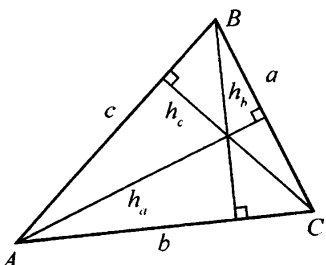


Рис. 1.

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения высоты на сторону, к которой она проведена.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дан треугольник, в котором $a = 6$, $b = 8$, $h_a = 4$. Найдите: c, h_b.
Ответ: $\sqrt{100 - 48\sqrt{3}}$, 3.

2. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = \sqrt{43}$, $\angle A = 30°$. Найдите площадь треугольника.
Ответ: $14\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$.

Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A.$$

3. В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 6$, площадь равна $6\sqrt{3}$. Найдите BC, $\cos C$.
Ответ: $2\sqrt{7}$, $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Площадь треугольника можно находить по формулам:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. (Формула Герона)

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где R – радиус описанной около треугольника окружности.

$$S = p \cdot r,$$

где p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в треугольник окружности.

Замечание 1. Центр описанной около треугольника окружности находится на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам.

Замечание 2. Центр вписанной в треугольник окружности находится на пересечении биссектрис его внутренних углов.

Задачи для самостоятельного решения.

4. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а радиус вписанной окружности равен 3. Найдите площадь треугольника.
   Ответ: 48.

5. В треугольнике ABC $\cos\angle A = 0{,}2$, $AB = 15$, $AC = 18$. Найдите радиус окружности, касающейся прямых AB и AC.
   Ответ: $9\sqrt{6}$ или $2\sqrt{6}$.

6. Дан треугольник ABC. Точки M и H принадлежат прямой BC, причем $\dfrac{MH}{BH} = \dfrac{3}{2}$, AM – медиана ΔABC. Площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.
   Ответ: 80 или 16.

7. Расстояние между параллельными прямыми равно 24. На одной из прямых взята точка C, а на другой точки A и B так, что треугольник ABC равнобедренный с боковой стороной 25. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
   Ответ: $\dfrac{21}{4}, \dfrac{15}{2}$.

4.2. Некоторые свойства треугольников

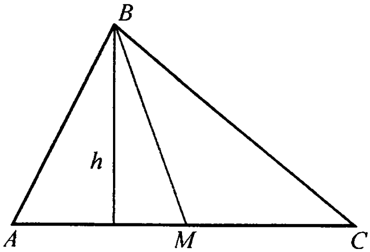


Рис. 2.

I.

$$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}AM\cdot h.$$

$$S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}MC\cdot h.$$

$$\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta BMC}}=\frac{AM}{MC}.$$

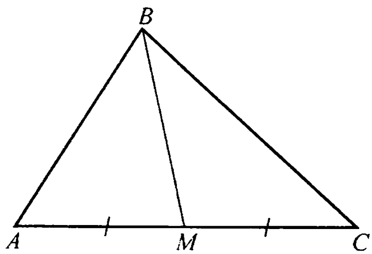


Рис. 3.

II.

$AM = MC.$

$$S_{\Delta ABM}=S_{\Delta BMC}.$$

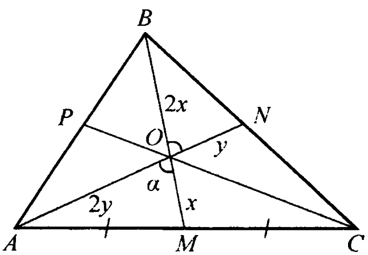


Рис. 4.

III.

BM, AN, CP – медианы треугольника ABC.

$BO : OM = AO : ON = CO : OP = 2 : 1.$

$$S_{\Delta AOM}=S_{\Delta MOC}=S_{\Delta CON}=S_{\Delta BON}=S_{\Delta BOP}=S_{\Delta AOP}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}.$$

$$S_{\Delta AOM}=S_{\Delta BON}=x\cdot y\sin\alpha.$$

$$S_{BPON}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

8. Расстояние между параллельными прямыми равно 8. На одной из прямых взята точка C, а на другой точки A и B так, что треугольник ABC равнобедренный и остроугольный с боковой стороной, равной 10. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: $\frac{25}{4}$ или $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

9. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14, 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.
Ответ: $54 + 12\sqrt{13}$ или $96 - 12\sqrt{13}$.

4.3. Теорема синусов

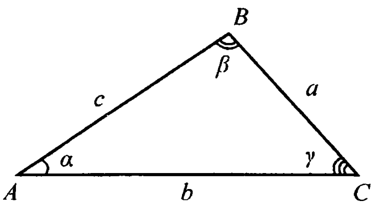


Рис. 5.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Каждое из полученных отношений равно диаметру описанной около треугольника окружности.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Высоты BH и AL треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC и ABO.
Ответ: 1.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AF. Известно, что $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABF и AFC.
Ответ: $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

12. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O, $\angle C = 60°$, $AB = 4$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOB.
Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

13. Найдите синус острого угла ромба $ABCD$, если радиусы описанных около треугольников ABC и ABD окружностей равны соответственно 3 и 4.
Ответ: $\frac{24}{25}$.

14. Длина средней линии трапеции, вписанной в окружность, равна $3\sqrt{6}$. Диагональ трапеции с боковой стороной и большим основанием образует углы 15° и 30° соответственно. Найдите радиус окружности.
Ответ: 6.

15. Около треугольника ABC со сторонами 17 и 25 описана окружность радиуса $\frac{85}{6}$. На стороне AC взята точка M такая, что $BM = \sqrt{241}$. Найдите площадь треугольника BMC.
Ответ: 90 или 180.

4.4. Теорема косинусов

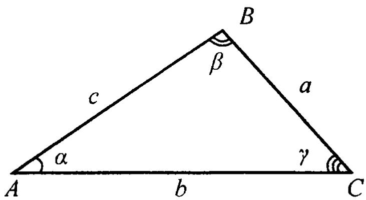


Рис. 6.

Теорема. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Задачи для самостоятельного решения.

16. В треугольнике ABC $AB = 7$, $BC = 13$, $AC = 15$. Найдите угол A и радиус описанной окружности около этого треугольника.
Ответ: 60°; $\frac{13}{\sqrt{3}}$.

17. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. AM – медиана. Найдите квадрат длины медианы AM.
Ответ: 23,5.

18. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 7$, $\angle A = 60°$. Найдите длину стороны AC.
Ответ: 8.

19. В треугольник ABC, в котором $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$, вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках M и N. Найдите длину MN.
Ответ: 2,5.

20. Около треугольника ABC, в котором $AB = 6$, $AC = 8$, описана окружность радиуса 5. Найдите длину стороны BC.
Ответ: 10.

21. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M так, что $AM = 3$, $MC = 5$. Известно, что $AB = 4$ и $\frac{BC}{BM} = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.
Ответ: $2\sqrt{39}$.

4.5. Вписанные и описанные окружности

1. Центр описанной около треугольника окружности находится на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Центр вписанной в треугольник окружности находится на пересечении биссектрис его внутренних углов.

Задачи для самостоятельного решения.

22. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AB = 8$, $BC = 6$. На прямой BC отмечена точка K так, что треугольник ACK – равнобедренный. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACK.
Ответ: $\frac{125}{24}$; $\frac{25}{4}$; $5\sqrt{5}$.

23. В равнобедренный треугольник, с основанием 24 и боковой стороной 20, вписана окружность. Найдите длину отрезка, заключенного между двумя сторонами треугольника, параллельного третьей стороне и касающегося окружности.
Ответ: 6.

24. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а основание равно 12. Окружность с центром на стороне треугольника касается двух других его сторон. Найдите радиус окружности.

Ответ: 4,8 или $\frac{48}{11}$.

25. Стороны треугольника ABC находятся в отношении $AC : BC : AB = 4 : 5 : 6$. Проведены высоты AH и BM. В четырехугольник $AMHB$ вписана окружность. Найти $\frac{MN}{AB}$.

Ответ: $\frac{7}{15}$.

26. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10. В образовавшиеся сегменты вписаны окружности наибольшего радиуса. Найдите радиусы этих окружностей.

Ответ: 1,25; 1,25; 2,25.

4.6. Параллелограмм

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

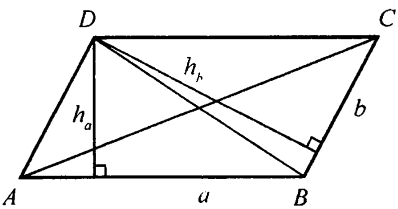


Рис. 7.

1. Пусть стороны параллелограмма равны a и b, а высоты, проведенные к ним, равны соответственно h_a и h_b, тогда $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

2. $S = a \cdot b \cdot \sin\beta$, где a и b – стороны параллелограмма, а β – угол между ними.

3. $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$, где d_1 и d_2 – диагонали параллелограмма, а φ – угол между ними.

4. $\angle A + \angle B = \angle D + \angle C = 180°$.

5. Сумма квадратов всех диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Задача. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 3$. Найдите площадь этого параллелограмма, если диагональ AC перпендикулярна к отрезку BE, где E – середина AD.

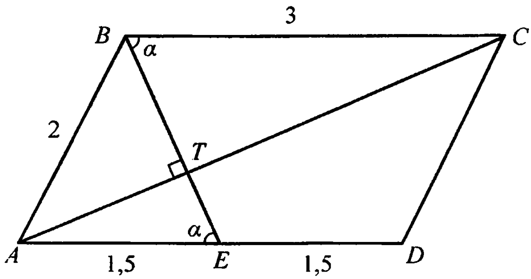


Рис. 8.

Решение: Пусть T – точка пересечения отрезков BE и AC и пусть $\angle CBT = \alpha$. Ясно, что тогда и $\angle AET = \alpha$.

Заметим, что $AE = 1{,}5$. Далее имеем, что $BT = 3\cos\alpha$, $AT = 1{,}5\sin\alpha$.

Применим к треугольнику ABT теорему Пифагора, получим $9\cos^2\alpha + \frac{9}{4}\sin^2\alpha = 4$, $36\cos^2\alpha + 9(1 - \cos^2\alpha) = 16$, $27\cos^2\alpha = 7$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$. Высота BT трегольника ABC равна $3\cdot\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Теперь несложно найти и AC.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BT^2} + \sqrt{BC^2 - BT^2} = \sqrt{4 - \frac{7}{3}} + \sqrt{9 - \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}.$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{15} = \sqrt{35}.$$

Ответ: $\sqrt{35}$.

Задача для самостоятельного решения.

27. В параллелограмме $ABCD$ сторона BC касается окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая CD пересекает окружность в точке P. Известно, что $AB = 6$, $\angle A = 30°$. Найдите длины отрезков AP и PD.

Ответ: 6 или 12.

4.7. Ромб

Ромб – это параллелограмм, все стороны которого равны.

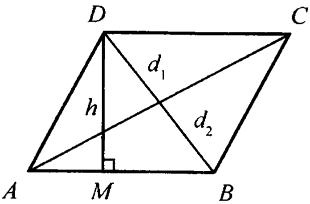


Рис. 9.

Если сторону ромба принять за a, диагонали – за d_1 и d_2, а величину острого угла – за α, верны утверждения:

$P = 4a$ (P – периметр);

$S = a \cdot h$ (h – высота ромба);

$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$;

$S = a^2 \cdot \sin\alpha$.

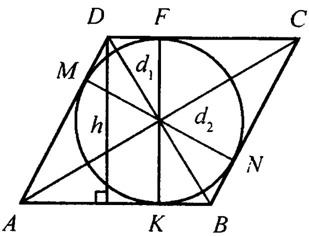


Рис. 10.

В ромб можно вписать окружность. Ее центр – точка пересечения диагоналей, а радиус равен половине высоты ромба, то есть $r = \frac{1}{2} \cdot h$.

Задача 1. Диагонали ромба равны 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

Решение: $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$; $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Сторона ромба находится из треугольника AOB (см. рис. 10). $AB = 5$. $S = 5h$, следовательно, $5h = 24$, $h = 4{,}8$, $r = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

Задача 2. В ромб, диагонали которого 6 и 8, вписана окружность. В углы ромба вписаны окружности, касающиеся сторон ромба и данной окружности. Найдите радиусы окружностей.

Решение: При решении предыдущей задачи нашли, что $r = OH = OP = 2{,}4$.

Если окружность вписана в угол DAB или DCB, то, полагая $O_1P = O_1H_1 = x$, будем иметь: $AO_1 = AO - (O_1P + PO) = 4 - x - 2{,}4 = 1{,}6 - x$ (рис. 11).

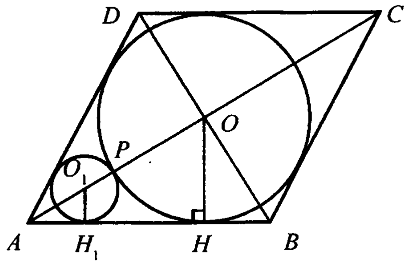


Рис. 11.

$\Delta AO_1H_1 \sim \Delta AOH$, поэтому $\dfrac{O_1H_1}{OH}=\dfrac{AO_1}{AO}$; $\dfrac{x}{2,4}=\dfrac{1,6-x}{4}$; $0,6(1,6-x)=$
$=x$; $0,96-0,6x=x$; $1,6x=0,96$; $x=0,6$.

Если радиус окружности, вписанной в угол ABC или ADC, обозначим через y, то приходим к уравнению $\dfrac{y}{2,4}=\dfrac{0,6-y}{3}$; $\dfrac{y}{0,8}=\dfrac{0,6-y}{1}$;
$y=0,8(0,6-y)$; $y+0,8=0,48$; $1,8y=0,48$; $y=\dfrac{4}{15}$.

Ответ: 0,6 или $\dfrac{4}{15}$.

Задачи для самостоятельного решения.

28. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$. На стороне BC взята точка E так, что $CE=2$. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения диагоналей ромба.
Ответ: $\sqrt{13}$.

29. Дан ромб, сторона которого равна 4, а острый угол 30°. Найдите радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.
Ответ: 2.
Указание: Соединить точку касания с вершиной ромба, не содержащей точку касания. Получится равнобедренный треугольник, около которого описана окружность.

30. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны 2 и 4.
Ответ: $\dfrac{256}{25}$.

31. В ромбе $ABCD$ $\angle A$ – острый, $\sin A = 0{,}6$. Найдите отношение радиуса окружности, вписанной в треугольник, ограниченный диагональю ромба и двумя сторонами ромба, к радиусу окружности, вписанной в ромб.

Ответ: $\frac{5}{9}\left(2-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ или $5\left(2-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

4.8. Трапеция

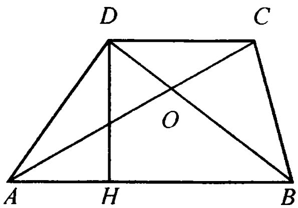


Рис. 12.

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется трапецией ($AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$). Параллельные стороны трапеции называются основаниями трапеции, а непараллельные – боковыми сторонами трапеции. Заметим, что $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180°$.

Приведем формулы и свойства трапеции:

1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту (рис. 12): $S = \frac{AB + DC}{2} \cdot DH$, где $DH \perp AB$.

2. Площадь трапеции равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle BOC$.

3. (Рис. 12). $\Delta DOC \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{DO}{OB} = \frac{OC}{AO}$.

4. (Рис. 12). $S_{\Delta ADO} = S_{\Delta COB}$ (докажите самостоятельно!).

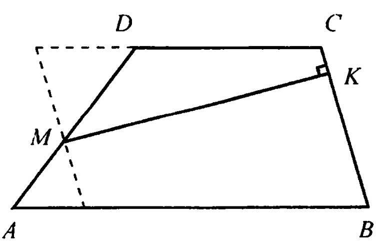


Рис. 13.

5. $\frac{S_{\Delta ADO}}{S_{\Delta DOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC}$.

6. Если $M \in AD$, $AM = MD$, $MK \perp CB$, то $S_{\text{трапеции}} = MK \cdot CB$. Из рисунка 13 легко видеть, что это так.

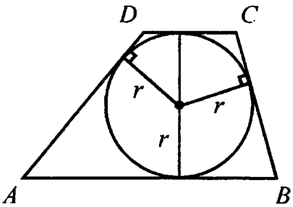


Рис. 14.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то суммы длин противоположных сторон равны: $AD + BC = DC + AB$.

Если высота трапеции h, а радиус вписанной окружности r, то $r = \frac{1}{2} \cdot h$.

8. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые ребра равны. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

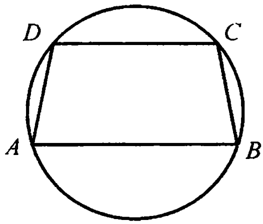


Рис. 15.

9. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная, то есть $AD = BC$. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ (как сумма вписанных углов).

Задача 1. Найдите площадь описанной около окружности равнобедренной трапеции с основаниями 9 и 16.

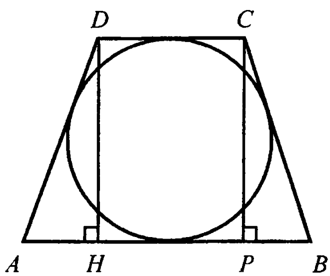


Рис. 16.

Решение: $DC = 9$, $AB = 16$, DH и CP – высоты трапеции, тогда $AH = PB = \frac{16 - 9}{2} = 3{,}5$.

Так как в трапецию вписана окружность, то $2AD = BC + AB$, $AD = \frac{9 + 16}{2} = 12{,}5$. Из прямоугольного треугольника ADH по теореме Пифагора находим DH: $DH = \sqrt{(12{,}5 - 3{,}5)(12{,}5 + 3{,}5)} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$.

Площадь $S = \frac{9+6}{2} \cdot 12 = 150$.

Ответ: 150.

Задача 2. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $S_{\Delta AOB} = 16$, $S_{\Delta DOC} = 9$. Найдите площадь трапеции.

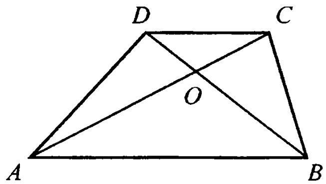


Рис. 17.

Решение: Поскольку $\Delta DOC \sim \Delta AOB$ (рис. 17), то $\frac{DC}{AB} = \sqrt{\frac{S_{\Delta DOC}}{S_{\Delta AOB}}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, но $\frac{DC}{AB} = \frac{OC}{AO} = \frac{3}{4}$.

$\frac{S_{\Delta DOC}}{S_{\Delta AOD}} = \frac{OC}{AO} = \frac{3}{4}$; $\frac{9}{S_{\Delta AOD}} = \frac{3}{4}$; $S_{\Delta AOD} = 12 = S_{\Delta OCB}$.

Итак, $S_{ABCD} = 9 + 16 + 12 + 12 = 49$.

Ответ: 49.

Задача 3. В трапеции $ABCD$ основания $BC = 49$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Решение: Это задача с двумя вариантами решений.

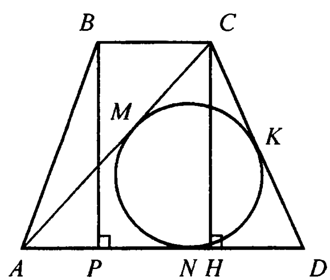


Рис. 18.

Ситуация 1.

Пусть окружность касается диагонали AC в точке M, AD – в точке N и боковой стороны CD – в точке K.

Найдем диагональ AC. Проведем $CH \perp AD$ и $BP \perp AD$.

$AP = HD = \dfrac{100-49}{2} = \dfrac{51}{2}$.

Из треугольника CHD находим CH:

$CH = \sqrt{35^2 - \left(\dfrac{51}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4900-2601}{4}} = \dfrac{\sqrt{2299}}{2}$.

$AH = \dfrac{51}{2} + 49 = \dfrac{149}{2}$, и из прямоугольного треугольника ACH находим AC:

$AC^2 = \left(\dfrac{149}{2}\right)^2 + \dfrac{2299}{4} = \dfrac{24500}{4}$. $AC = \dfrac{70\sqrt{5}}{2} = 35\sqrt{5}$.

Далее пусть $CK = CM = x$, тогда $AM = AN = 35\sqrt{5} - x$, $KD = ND = 35 - x$. Так как $AD = AN + ND$, то $35\sqrt{5} - x + 35 - x = 100$, $2x = 35\sqrt{5} - 65$, $x = \dfrac{35\sqrt{5}-65}{2}$.

Ситуация 2.

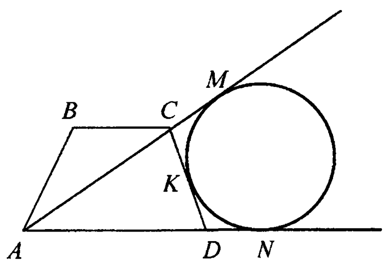


Рис. 19.

Пусть $CK = CM = x$, тогда $AM = 35\sqrt{5} + x$, $KD = ND = 35 - x$ и $AN = 135 - x$. Так как $AM = AN$, то для нахождения x получаем уравнение: $35\sqrt{5} + x = 135 - x$, $x = \dfrac{135-35\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{35\sqrt{5}-65}{2}$ или $\dfrac{135-35\sqrt{5}}{2}$.

Задача 4. В равнобедренную трапецию вписана окружность, которая точкой касания делит боковую сторону в отношении 2 : 3. Через центр окружности и вершину трапеции проходит прямая, которая отсекает от трапеции треугольник. Какую часть от площади трапеции составляет площадь треугольника?

Решение:

Ситуация 1.

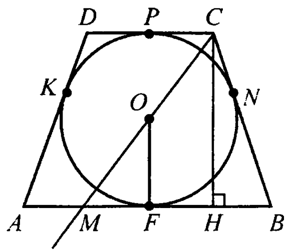


Рис. 20.

Пусть 1 часть x, тогда $CN = PC = DP = DK = 2x$, $BN = FB = AK = AF = 3x$, $DC = 4x$, $AB = 6x$.

Заметим, что высота CH для ΔMCB и трапеции $ABCD$ одна, а $BH = \dfrac{6x - 4x}{2} = x$, тогда $FH = MF = 2x$, поскольку OF – средняя линия ΔMCH.

Итак, $MB = x + 2x + 2x = 5x$, $S_{\Delta MCB} = \dfrac{1}{2}\cdot 5x\cdot CH$, $S_{ABCD} = \dfrac{4x + 6x}{2}\cdot CH = 5x\cdot CH$. $\dfrac{S_{\Delta MCB}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2}$.

Ситуация 2.

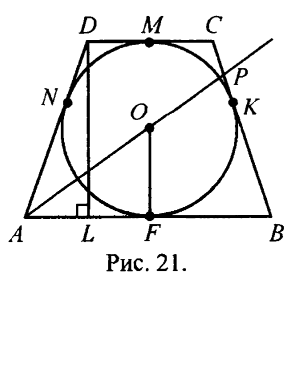


Рис. 21.

Здесь прямая проходит через вершину A и центр окружности O.

Как и в первой ситуации, $CK = MC = DM = DN = 2x$, $BK = BF = AF = AN = 3x$. $AF = 3x$, $DL = \sqrt{24}x = 2\sqrt{6}x$ (из ΔADL), $OF = \sqrt{6}x$, т.к. $OF = 0{,}5DL$.

Находим AO: $AO = \sqrt{6x^2 + 9x^2} = x\sqrt{15}$;

$$\sin\angle OAF = \frac{OF}{OA} = \frac{x\sqrt{6}}{x\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{2}{5}};\ \cos\angle OAF = \sqrt{\frac{3}{5}};$$

$$\sin\angle A = \sin\angle B = \frac{DL}{DA} = \frac{2\sqrt{6}x}{5x} = \frac{2\sqrt{6}}{5};\ \cos\angle B = \frac{1}{5}.$$

Найдем $\sin\angle APB$:

$$\sin\angle APB = \sin(180^\circ - (\angle OAF + \angle B)) = \sin(\angle OAF + \angle B) = \sin\angle OAF\cdot\cos\angle B + \cos\angle OAF\cdot\sin\angle B = \sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} + \frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}.$$

Применим к ΔAPB теорему синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle APB} = \frac{AP}{\sin\angle B};\ AP = \frac{6x\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{7\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}} = \frac{12x\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} = \frac{12x\sqrt{15}}{7};$$

$$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2}\cdot AP\cdot AB\cdot\sin\angle PAB = \frac{1}{2}\cdot\frac{12x\sqrt{15}}{7}\cdot 6x\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{36x^2\sqrt{6}}{7}.$$

$$S_{\text{трап.}} = \frac{4x + 6x}{2}\cdot 2x\sqrt{6} = 10x^2\sqrt{6}.$$

$$\frac{S_{\Delta MCB}}{S_{ABCD}} = \frac{36x^2\sqrt{6}}{7}\cdot\frac{1}{10x^2\sqrt{6}} = \frac{18}{35}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{18}{35}$.

Задачи для самостоятельного решения.

32. Площадь треугольника MKL равна 66. В треугольник вписана окружность, касающаяся средней линии $NP \parallel ML$. Найдите длину MK, если $ML = 11$.

Ответ: 20 или 13.

33. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Основание AD в 2 раза больше основания BC. Точка P – середина стороны AD. Прямые BP и CP пересекают диагонали AC и BD соответственно в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, где O – точка пересечения диагоналей AC и BD.

Ответ: 37,5.

34. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AB = 64$, $DC = 36$. В трапецию вписана окружность, а также вписана окружность, касающаяся двух сторон трапеции и вписанной окружности. Найдите радиус второй окружности.

Ответ: $\frac{8}{3}$ или 6.

35. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB = 27$, $CD = 28$, $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите AC.

Ответ: $\sqrt{724}$ или 28.

36. Основания трапеции равны 7 и 11, а боковые стороны – 3 и 5. Найдите площадь трапеции.
Ответ: 27.

37. В трапеции $KLMN$ основания равны 12 и 36, а боковые стороны KL и MN соответственно 10 и 26. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKN.

Ответ: 2 или 6.

38. Площадь трапеции равна 3, основания – 1 и 2. Найдите площадь треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$.

39. В описанной около окружности равнобоковой трапеции основания относятся как 3:5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большое основание; точка H – основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону?

Ответ: 1:15 или 1:3.

40. Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120°. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найти радиус окружности.

Ответ: $\sqrt{3}-1,\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

41. Угол C треугольника ABC равен 60°, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на AB и AC как на диаметрах. $DB:DC = 2:3$. Найти $\cos\angle A$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{93}}{62};\ \frac{\sqrt{93}}{625}$.

42. В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. На биссектрисе AL как на диаметре построена окружность, проходящая через одну из вершин B и C. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\frac{25\sqrt{17}}{12};\ \frac{15\sqrt{97}}{12}$.

43. В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. На прямой, содержащей медиану AM, взята точка O так, что AO равно радиусу описанной около треугольника ABC окружности. Найдите площадь треугольника BOC.

Ответ: $2\left(24-\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{97}}\right);\ 2\left(24+\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{97}}\right)$.

Задания уровня С5.
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с параметрами – один из самых трудных разделов школьного курса математики. Здесь, кроме использования определенных алгоритмов решения уравнений и неравенств, приходится обдумывать, по какому признаку нужно разбить множество значений параметра на классы, следить за тем, чтобы учесть различные нюансы.

5.1. Задачи с использованием свойств квадратного трехчлена

Выражение вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется квадратным трехчленом. Он имеет два корня при $D > 0$, один корень (два равных) при $D = 0$ и не имеет корней при $D < 0$.

Утверждение 1. Для того, чтобы квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имел два корня, один из которых меньше α, а другой больше α, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $a \cdot f(\alpha) < 0$.

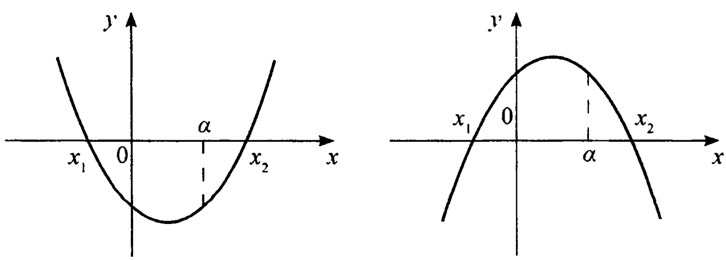


Рис. 1.

Если $\left.\begin{matrix} a > 0. \\ f(\alpha) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0.$ Если $\left.\begin{matrix} a < 0, \\ f(\alpha) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0.$

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при которых один корень уравнения $x^2 - (3a + 2)x + 2a - 1 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.

Решение: Согласно *утверждению 1*, решаем неравенство $f(1) < 0$: $1 - (3a + 2) + 2a - 1 < 0$, $a > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$.

Утверждение 2. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше α, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$

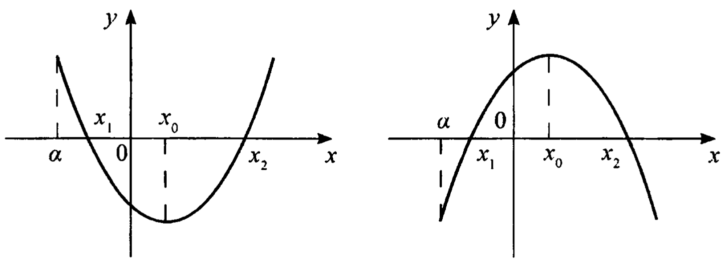


Рис. 2.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3.

Решение: Условие задачи выполняется при всех значениях параметра, которые удовлетворяют системе неравенств (*по утверждению 2*):

$$\begin{cases} 9a^2 - 2 + 2a - 9a^2 \geq 0, \\ 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0, \\ 3a > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 9(a-1)\left(a - \frac{11}{9}\right) > 0. \end{cases}$$

Откуда $a > \frac{11}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{11}{9}; +\infty\right)$.

Утверждение 3. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были меньше α, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$

Пример 3. При каких значениях m корни уравнения $(m + 1)x^2 + 2x - 3m - 1 = 0$ меньше 1?

Решение: Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 1 + (m + 1)(3m + 1) \geq 0, \\ (m + 1) \cdot f(1) > 0, \\ -\dfrac{1}{m + 1} < 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m^2 + 4m + 2 \geq 0, \\ (m + 1)(2 - 2m) > 0, \\ \dfrac{m + 2}{m + 1} > 0. \end{cases}$$

Решение этой системы не представляет труда, получаем, что $m \in (-1; 1)$. Заметим, что в задаче не оговаривается число корней уравнения, поэтому, рассматривая случай, когда $m + 1 = 0$, $m = -1$, получаем $x = -1 < 1$.

Ответ: $[-1; 1)$.

Рассмотрим еще один из возможных вариантов решения задач подобного типа.

Пример 4. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ меньше, чем 3?

Решение: При $a = 2$ получаем $-4x + 5 = 0$, откуда $x = \dfrac{5}{4} < 3$. Значит, $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 2$. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - \dfrac{2a}{a - 2}x + \dfrac{a + 3}{a - 2} = 0$ и рассмотрим график функции $f(x) = x^2 - \dfrac{2a}{a - 2}x + \dfrac{a + 3}{a - 2}$. Графически условие задачи покажем на рисунке 3.

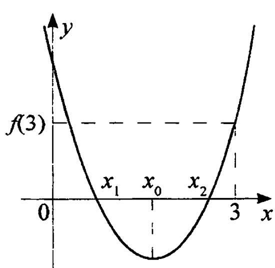


Рис. 3.

Дадим аналитическое описание этой модели:

1) $D \geq 0$ (или $\frac{D}{4} \geq 0$, это не принципиально);

2) $f(3) > 0$;

3) $x_0 < 3$.

Расшифруем эти условия:

1) $\frac{D}{4} = 6 - a$, значит $6 - a \geq 0$;

2) $f(3) = 9 - \frac{2a}{a-2} \cdot 3 + \frac{a+3}{a-2} = \frac{4a-15}{a-2}$;

3) $x_0 = \frac{a}{a-2}$.

Таким образом, получаем систему неравенств $\begin{cases} 6 - a \geq 0, \\ \frac{4a-15}{a-2} > 0, \\ \frac{a}{a-2} < 3. \end{cases}$

Решив ее, получаем $a < 2$; $\frac{15}{4} < a \leq 6$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{15}{4}; 6\right]$.

Утверждение 4. Для того, чтобы оба корня трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ x_1 и x_2 принадлежали промежутку $(\alpha; \beta)$ $(\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta. \end{cases}$$

Проиллюстрируем данное утверждение на рисунке 4.

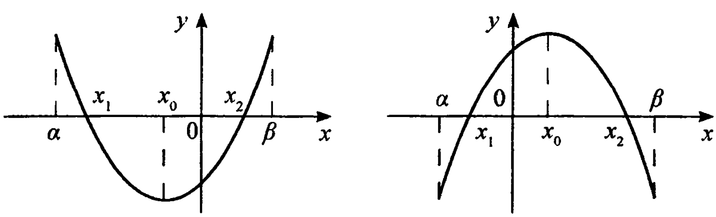


Рис. 4.

$a > 0, f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0.$ $\quad a < 0, f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0.$

$a > 0, f(\beta) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\beta) > 0.$ $\quad a < 0, f(\beta) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\beta) > 0.$

Ясно, что при $D = 0$ вершина параболы расположена в точке с координатами $(x_0;\ 0)$.

Пример 5. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-1)x^2 + ax + a - 4 = 0$ расположены в промежутке $(-2;\ 2)$?

Решение: Составим систему неравенств, считая $a \neq 1$:

$$\begin{cases} a^2 - 4(a-1)(a-4) \geq 0, \\ (4(a-1) - 2a + a - 4)(a-1) > 0, \\ (a-1)(4(a-1) + 2a + a - 4) > 0, \\ -2 < \dfrac{a}{2(a-1)} < 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3a^2 + 20a - 16 \geq 0, \\ (a-1)(3a-8) > 0, \\ (a-1)(7a-8) > 0, \\ \dfrac{3a-4}{a-1} > 0, \\ \dfrac{5a-4}{2(a-1)} > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$3a^2 - 20a + 16 \leq 0$. $D = 100 - 48 = 52$. $a_{1,2} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{13}}{3}$.

$a \in \left[\dfrac{10 - 2\sqrt{13}}{3};\ \dfrac{10 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$.

Решим второе неравенство системы: $a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

Решим третье неравенство системы: $a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1\frac{1}{7};\ +\infty\right)$.

Решим четвертое неравенство системы: $a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Решим пятое неравенство системы: $a \in \left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Общее решение пяти неравенств: $a \in \left(2\frac{2}{3};\ \dfrac{10 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$.

Поскольку в условиях задачи ничего не говорится о числе корней уравнения, рассмотрим случай, при котором коэффициент перед x^2 обращается в нуль, тогда уравнение становится линейным. При $a = 1$ $x = 3$, однако это значение не входит в промежуток, заданный условием задачи.

Ответ: $\left(2\frac{2}{3};\ \dfrac{10 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$.

Утверждение 5. Для того, чтобы меньший корень x_1 трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ принадлежал промежутку $(\alpha;\ \beta)$, а больший корень

x_2 этому промежутку не принадлежал, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} a\cdot f(\alpha) > 0, \\ a\cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$

Проиллюстрируем это утверждение на рисунке 5.

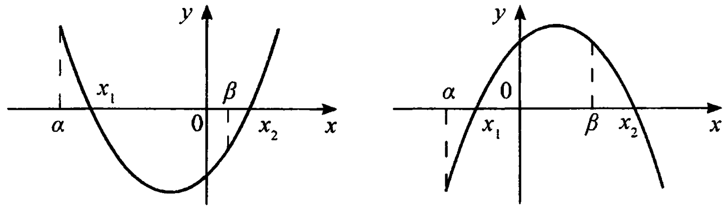


Рис. 5.

$a > 0, f(\alpha) > 0 \Rightarrow a\cdot f(\alpha) > 0.$ $\quad a < 0, f(\alpha) < 0 \Rightarrow a\cdot f(\alpha) > 0.$

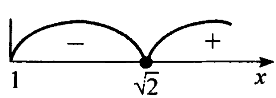
$a > 0, f(\beta) < 0 \Rightarrow a\cdot f(\beta) < 0.$ $\quad a < 0, f(\beta) > 0 \Rightarrow a\cdot f(\beta) < 0.$

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{2ax-1} = x - 1$.

Решение: Решим задачу графически. Выразим параметр a через x: $\sqrt{2ax-1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax - 1 = (x-1)^2, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x}, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Исследуем функцию $a(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x}$ на области определения $x \geq 1$ и построим ее график.

$a'(x) = \dfrac{(2x-2)x - x^2 + 2x - 2}{2x^2} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2}$. Функция $a(x)$ имеет на луче $[1; +\infty)$ единственную критическую точку $x = \sqrt{2}$.



На промежутке $[1; \sqrt{2}]$ функция убывает.

На промежутке $[\sqrt{2}; +\infty)$ функция возрастает.

$x = \sqrt{2}$ – точка максимума; $a(\sqrt{2}) = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

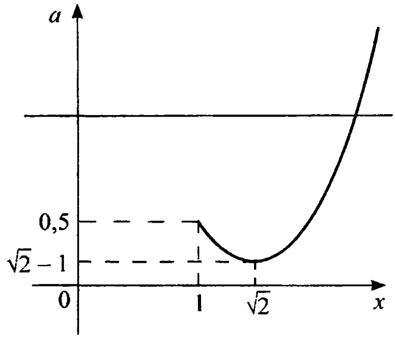


Рис. 6.

Из рисунка 6 видно, что при $a = \sqrt{2} - 1$ уравнение имеет один корень $x = \sqrt{2}$. При $\sqrt{2} - 1 < a \le \frac{1}{2}$ уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения $x^2 - 2x(1 + a) + 2 = 0$. (*)

$x_{1,2} = 1 + a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}$.

При $a > \frac{1}{2}$ уравнение имеет один корень, который является бо́льшим корнем уравнения (*), т.е. $x = 1 + a + \sqrt{a^2 + 2a - 1}$.

Ясно, что при $a < \sqrt{2} - 1$ уравнение корней не имеет.

Ответ: при $a < \sqrt{2} - 1$ уравнение корней не имеет;

при $a = \sqrt{2} - 1$ уравнение имеет один корень $x = \sqrt{2}$;

при $\sqrt{2} - 1 < a \le \frac{1}{2}$ уравнение имеет два корня $x_{1,2} = 1 + a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}$;

при $a > \frac{1}{2}$ уравнение имеет один корень $x = 1 + a + \sqrt{a^2 + 2a - 1}$.

Пример 7. Определить, при каких значениях a уравнение $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$ имеет ровно два корня.

Решение: Перепишем исходное уравнение в виде $a = -2x^3 + 3x^2 + 36x + 3$ и построим график функции $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x + 3 = a$. Для того чтобы найти число корней уравнения $f(x) = a$, часто бывает достаточно представить схематический график функции $y = f(x)$, не проводя полных исследований.

При решении данной задачи достаточно найти экстремумы функции и промежутки монотонности:

1. $D(f) = R$, поскольку функция является многочленом.

2. Находим производную функции и критические точки из уравнения $f'(x) = 0$, поскольку $D(f') = R$.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$; $x^2 - x - 6 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

3. Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции. На промежутках $(-\infty; -2]$; $[3; +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $[-2; 3]$ функция возрастает.

$x = -2$ – точка минимума; $f(-2) = -41$.

$x = 3$ – точка максимума; $f(3) = 84$.

Строим график функции $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x + 3$ и находим точки пересечения графика этой функции с прямой $y = a$.

Покажем схематично решение на рисунке 7.

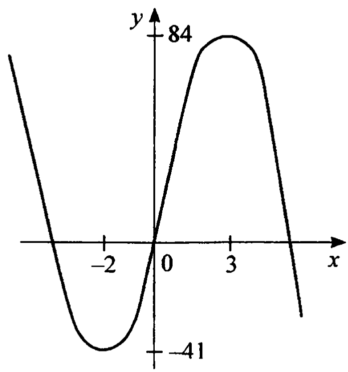


Рис. 7.

Ясно, что данное уравнение имеет ровно два корня: при $a = -41$ и при $a = 84$.

Ответ: -41; 84.

Пример 8. Решить неравенство $|x| + |x - a| \le 2$.

Решение: Строим график функции $y = |x| + |x - a|$. Если $x = 0$, то $y = |a|$, если $x = a$, то $y = |a|$. Имеем две точки излома графика: $(0; |a|)$ и $(a; |a|)$.

Пусть $a > 0$, точки излома $(0; a)$ и $(a; a)$, тогда при $x = 2a$ $y = 3|a| = 3a$; при $x = -a$ $y = 3|-a| = 3|a| = 3a$. Покажем график функции на рисунке 8.

Пусть $a < 0$, точки излома $(0; -a)$ и $(a; -a)$, тогда при $x = 2a$ $y = -3a$; при $x = -a$ $y = -3a$. Покажем график функции на рисунке 9.

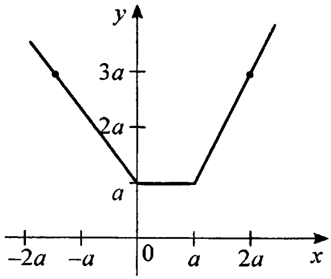


Рис. 8.

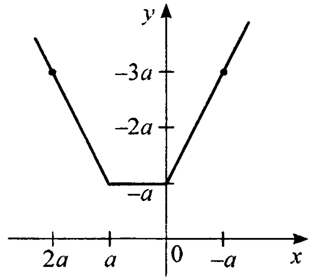


Рис. 9.

Прямая $y = 2$ параллельна оси Ox, тогда очевидно, что при $|a| > 2$ неравенство решения не имеет.

При $a = 2$ $x \in [0; 2]$; при $a = -2$ $x \in [-2; 0]$.

При $|a| < 2$ решение должно удовлетворять двойному неравенству $x_1 < x < x_2$, где x_1 определяется из уравнения $-x - x + a = 2$, $x_1 = 0{,}5(a - 2)$, а x_2 определяется из уравнения $x + x - a = 2$, $x_2 = 0{,}5(a + 2)$.

Замечание. Данное неравенство можно решить иначе. Запишем его в виде $|x - a| \le 2 - |x| \Leftrightarrow |x| - 2 \le a - x \le 2 - |x| \Leftrightarrow x + |x| - 2 \le a \le 2 + x - |x|$.

Если $x \ge 0$, то $2x - 2 \le a \le 2$, если $x < 0$, то $-2 \le a \le 2 + 2x$. Очевидно, что $-2 \le a \le 2$. $a = 2 + 2x_1$, $x_1 = 0{,}5(a - 2)$, $a = 2 + 2x_2$, $x_2 = 0{,}5(a + 2)$. Покажем решение на рисунке 10.

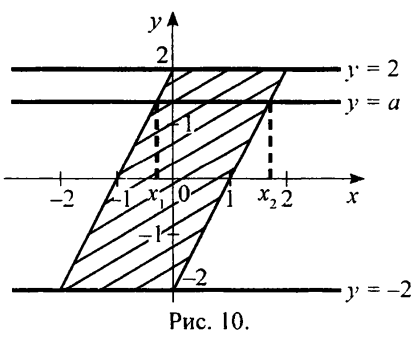


Рис. 10.

$x \in [0{,}5(a-2);\ 0{,}5(a+2)]$.

Ответ: при $|a| \le 2$ $\ x \in [0{,}5(a-2);\ 0{,}5(a+2)]$;
при $|a| > 2$ решений нет.

5.2. Задачи с параметром с использованием свойств всех функций

Пример 1. Найдите все значения m, при которых $f(x) = x^3 + 3x^2 + 24|x-2| + m$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках.

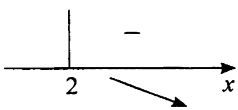
Решение: Необходимо узнать, при каких значениях m уравнение $x^3 + 3x^2 + 24|x-2| + m = 0$ имеет ровно 2 корня.

Пусть $y = m$, тогда $y = -x^3 - 3x^2 - 24|x-2|$.

Рассмотрим две системы:

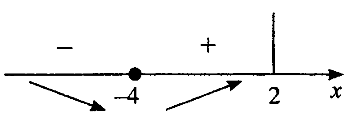
$$\begin{cases} x \ge 2, \\ y = -x^3 - 3x^2 - 24x + 48; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2, \\ y = -x^3 - 3x^2 + 24x - 48. \end{cases}$$

Для первой системы находим производную и критические точки функции $y(x)$: $y' = -3x^2 - 6x - 24$, $x^2 + 2x + 12 = 0$, $D < 0$ – корней нет.



На промежутке $[2; +\infty)$ функция убывает.

Для второй системы находим производную и критические точки функции $y(x)$: $y' = -3x^2 - 6x + 24$, $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x = -4$ или $x = 2$.



На промежутке $(-\infty; -4]$ функция убывает, а на отрезке $[-4; 2]$ возрастает.

$x_{min} = -4$, $y_{min} = -128$. Если $x = 2$, то $y = -20$.

График функции пересекает прямую в двух точках при $m = -128$ и $m = -20$.

Ответ: $-128; -20$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \le 3$ является отрезок.

Решение: Исходное неравенство равносильно неравенству $|x+a| \leq 3-\sqrt{5-x}$ или $\sqrt{5-x}-3 \leq x+a \leq 3-\sqrt{5-x}$, откуда получаем, что $\sqrt{5-x}-3-x \leq a \leq 3-\sqrt{5-x}-x$.

Далее строим графики функций: $f_1(x)=\sqrt{5-x}-3-x$ и $f_2(x) =$ $= 3-\sqrt{5-x}-x$.

Заметим, что областью определения каждой функции является неравенство $x \leq 5$.

Находим координаты точек пересечения графиков функций: $\sqrt{5-x}-3-x=3-\sqrt{5-x}-x$, $2\sqrt{5-x}=6$, $\sqrt{5-x}=3$, $x=-4$, $f_1(x)=4=f_1(x)$.

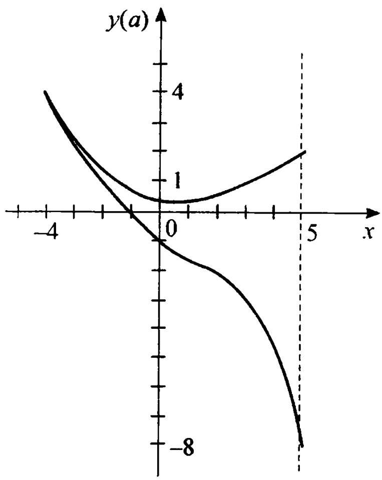


Рис. 11.

Из рисунка видно, что решение задачи $a \in (-8; 4)$.

Ответ: $(-8; 4)$.

Пример 3. При каких значениях a уравнение $2a(x+1)^2 -$ $- |x+1|+1=0$ имеет четыре различных решения?

Решение: Так как $(x+1)^2=|x+1|^2$, то, обозначив $|x+1|=t$, $t \geq 0$, получим уравнение $2at^2-t+1=0$.

Теперь надо узнать, при каких значениях a уравнение имеет два положительных корня.

Заметим, что $a \neq 0$.

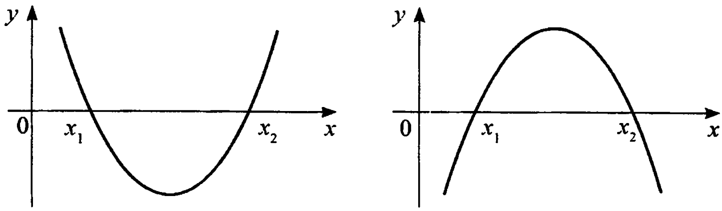


Рис. 12.

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ f(0) < 0, \\ x_0 > 0. \end{cases}$$

Из левого и правого рисунка делаем вывод, что необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D > 0, \\ a\cdot f(0) > 0, \\ x_0 > 0. \end{cases}$

Для уравнения $2at^2 - t + 1 = 0$ имеем $\begin{cases} 1 - 8a > 0, \\ a > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a < \frac{1}{8}, \\ a > 0. \end{cases}$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Пример 4[1]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых существует прямая, перпендикулярная оси ординат и имеющая четное число общих точек с графиком функции $f(x) = (5a + 1)x - (x - 2)|x - a|$.

Решение: Пусть $x - a \geq 0$, $x \geq a$, тогда

$$f(x) = (5a + 1)x - (x - 2)|x - a| = -x^2 + (6a + 3)x - 2a. \qquad (1)$$

График этой функции – парабола, ее ветви направлены вниз и ось симметрии $x = 3a + \frac{3}{2}$.

Пусть теперь $x - a < 0$, $x < a$, в этом случае

$$f(x) = x^2 + (4a - 1)x + 2a. \qquad (2)$$

График этой функции – парабола с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -\frac{4a - 1}{2}$.

Чтобы прямая имела с графиком функций четное число точек пересечения, необходимо и достаточно, чтобы функция была не монотонная. Возможная ситуация изображена на рисунке 13.

[1] Задание ЕГЭ 2010 г.

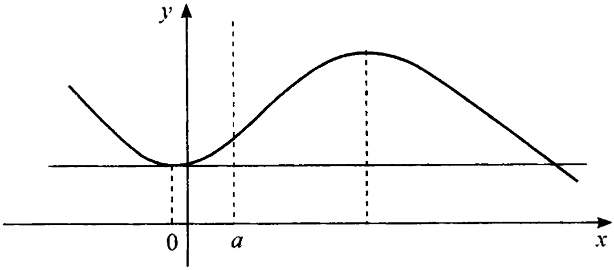


Рис. 13.

Абсцисса вершины параболы (1) должна быть больше a, а абсцисса вершины параболы (2) должна быть меньше a.

Получаем систему: $\left[\begin{array}{l} 3a + \dfrac{3}{2} > a, \\ -\dfrac{4a-1}{2} < a; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a > -\dfrac{3}{4}, \\ a > \dfrac{1}{6}; \end{array}\right. \quad a > -\dfrac{3}{4}.$

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

Пример 5. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 4x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение:

1) Пусть $x - a^2 \geq 0$, $x \geq a^2$, тогда $f(x) = x^2 - 2x + 2a^2 - 4x = x^2 - 6x + 2a^2$. График представляет собой часть параболы, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины этой параболы $x = 3$.

2) Пусть $x - a^2 < 0$, тогда $f(x) = x^2 + 2x - 2a^2 - 4x = x^2 - 2x - 2a^2$. Это тоже график части параболы, ветви ее направлены вверх, а абсцисса вершины параболы $x = 1$.

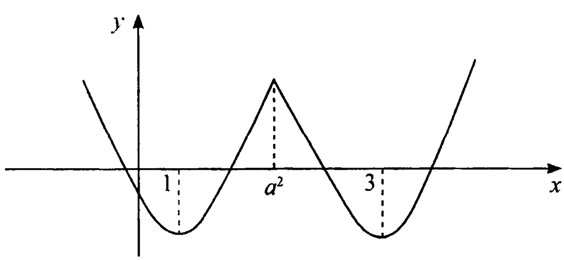


Рис. 14.

Из рисунка видно, что функция будет иметь хотя бы одну точку максимума, если $1 < a^2 < 3$.

1) $a^2 > 1$, 2) $a^2 < 3$.

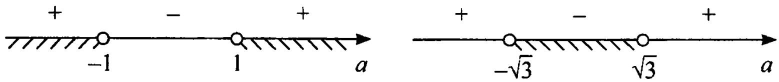


Рис. 14.

Решение неравенства $a \in (-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3})$.

В школьном курсе математики не изучается формула расстояния от точки до прямой, хотя ее применение облегчает решение некоторых задач на параметры.

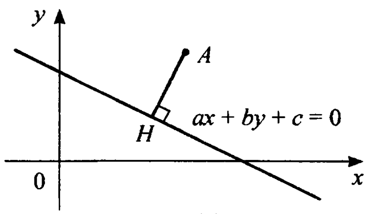


Рис. 15.

Пусть дана прямая $ax + by + c = 0$ и точка $A(x_0; y_0)$.

Проводим перпендикуляр AH к прямой, тогда

$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 6. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ y = 2 + ax \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение.

1 случай. Пусть $x \geq 0$, тогда $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ – часть окружности с центром в точке $O(3; 4)$ и радиуса 2.

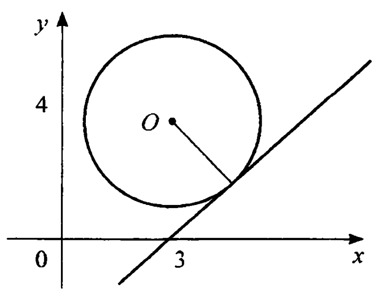


Рис. 16.

Очевидно, что расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности. Уравнение прямой запишем в виде: $ax - y + 2 = 0$, $d = \frac{|3a - 4 + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|3a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$; $\frac{|3a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$.

Решая это уравнение возведением обеих частей в квадрат, получаем равносильное ему уравнение, при этом помним, что $|a|^2 = a^2$.

$\frac{(3a - 2)^2}{a^2 + 1} = 4$, $9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$, $5a^2 = 12$, $a = 0$ и $a = \frac{12}{5}$.

Далее необходимо выполнить проверку, чтобы узнать, удовлетворяют ли условию задачи $a = 0$ и $a = \frac{12}{5}$.

Если $a = 0$, то $y = 2$, и первое уравнение системы примет вид $(|x| - 3)^2 + 4 = 4$. Это уравнение имеет два решения и не удовлетворяет условию задачи.

Если $a = \frac{12}{5}$, то система имеет единственное решение, в чем просим читателя убедиться самостоятельно.

2 случай. Пусть $x < 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ ax - y + 2 = 0; \end{cases} \quad d = \frac{|-3a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2.$$

Решая это уравнение, получим $a = 0$ (не удовлетворяет условию задачи) и $a = -\frac{12}{5}$. Непосредственная подстановка значения $a = -\frac{12}{5}$ показывает, что система имеет единственное решение.

Ответ: $\pm\frac{12}{5}$.

Решим задачу с применением формулы расстояния от точки до прямой.

Пример 7[1]. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{(x - 2a)^2 + (y - a)^2} \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x - 2y \ge 1 \end{cases}$ имеет решение.

Решение: Первое неравенство системы задает круг с центром $(2a; a)$ и радиуса $\frac{|a|}{6\sqrt{5}}$.

[1] Задание из сборника «ЕГЭ – 2012. Математика, типовые экзаменационные работы».

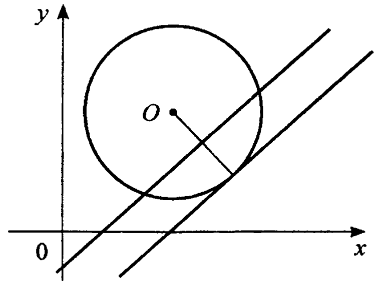


Рис. 17.

Второе неравенство системы запишем в виде $y \le \frac{1}{2}(x-1)$. Оно задает часть плоскости, расположенной ниже прямой $y = \frac{1}{2}(x-1)$, и ее граница – эта прямая.

Система имеет решение, если расстояние от центра круга до прямой не более радиуса ($d \le R$).

$d = \frac{|2a-2a-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{|a|}{6\sqrt{5}}$, $|a| \ge 6$, откуда $a \ge 6$ или $a \le -6$.

Ответ: $(-\infty; -6]$, $[6; +\infty)$.

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(y-2x)(2y-x) \le 0,\\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} = \frac{|a-1|}{\sqrt{5}}\end{cases}$ имеет ровно 2 решения.

Решение: Первое неравенство задает вертикальные углы, изображенные в прямоугольной системе координат xOy.

Графиком второго уравнения системы является окружность с центром в точке $(-a; a)$ и радиуса $R = \frac{|a-1|}{\sqrt{5}}$.

Заметим, что оба графика симметричны относительно прямой $y = -x$, на которой лежит центр окружности.

Система будет иметь ровно 2 решения тогда и только тогда, когда расстояние от точки P до прямой $y = 2x$ будет равняться радиусу данной окружности.

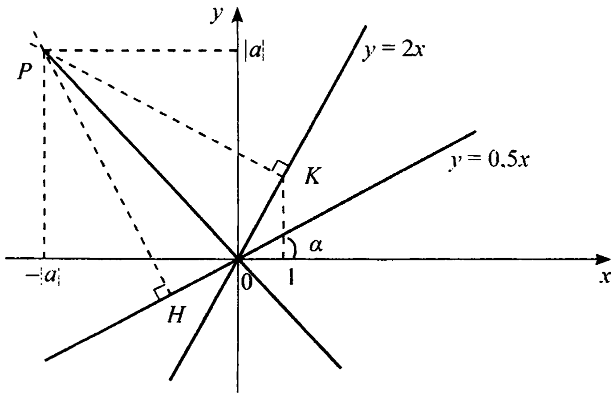


Рис. 18.

Из ΔPOK находим $PK = PO \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, где $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Тогда $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $PK = |a|\sqrt{2} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) =$

$= |a|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3|a|}{\sqrt{5}}$.

Итак, $\frac{3|a|}{\sqrt{5}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{5}}$, $3|a| = 3|a-1|$, $9a^2 - (a-1)^2 = 0$.

$(3a - a + 1)(3a + a - 1) = 0$, $(2a + 1)(4a - 1) = 0$, откуда $a = -\frac{1}{2}$ и $a = \frac{1}{4}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$.

Рассмотрим другой вариант решения, где используется формула расстояния от точки до прямой.

Очевидно, что окружность должна касаться прямых $2y - x = 0$ и $2x - y = 0$.

Используя формулу расстояния от точки до прямой, получим: $PK = \frac{|-2a - a|}{\sqrt{5}} = \frac{3|a|}{\sqrt{5}}$.

По условию $\frac{3|a|}{\sqrt{5}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{5}}$, но это уравнение уже решено ранее.

Аналогично $PH = \frac{|-2a - a|}{\sqrt{5}} = \frac{3|a|}{\sqrt{5}}$. Новых решений нет.

Мы привели два варианта решения задачи, первый вариант принадлежит составителям задачи.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} |3x - y + 2| \le 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что $3a + 4 \ge 0$, $a \ge -\frac{4}{3}$.

При $a = -\frac{4}{3}$ второе уравнение принимает вид $(x + 4)^2 + (y - \frac{4}{3})^2 =$ $= 0$, откуда $x = -4$, $y = \frac{4}{3}$.

Проверим, удовлетворяет ли найденная пара $\left(-4; \frac{4}{3}\right)$ первому неравенству системы.

Имеем $\left|-12 - \frac{4}{3} + 2\right| \le 12$, $11\frac{3}{4} \le 12$ – верное неравенство, следовательно, $a = -\frac{4}{3}$ является решением системы.

Пусть далее $a > -\frac{4}{3}$. Первое неравенство системы перепишем в виде $-12 \le 3x - y + 2 \le 12$, $-14 = 3x \le -y \le 10 - 3x$, $3x - 10 \le y \le 3x + 14$.

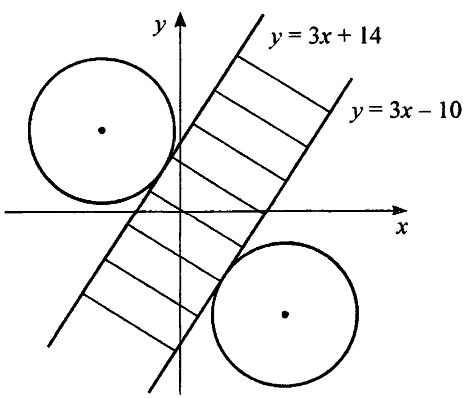


Рис. 19.

Решением этого неравенства является полоса, заключенная между прямыми $y = 3x - 10$ и $y = 3x + 14$.

Второе уравнение системы представляет окружность с центром $(3a; -a)$ и радиуса $R = \sqrt{3a + 4}$.

Чтобы система имела единственное решение, необходимо (но недостаточно), чтобы расстояние от центра окружности до прямой равнялось радиусу.

Воспользовавшись формулой расстояния от точки до прямой, получим:

1) $\frac{|9a + a - 10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{3a + 4}$, $\frac{|10a - 10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{3a + 4}$, $10a^2 - 20a + 10 - 3a - 4 = 0$, $10a^2 - 23a + 6 = 0$, откуда $a = 2$ и $a = 0{,}3$.

$a = 2$ удовлетворяет условию задачи, а при $a = 0{,}3$ окружность касается прямой $y = 3x - 10$, находясь внутри полосы.

2) $\frac{|9a + a + 14|}{\sqrt{10}} = \sqrt{3a + 4}$, корни этого уравнения $a = -1{,}3$ и $a = -1{,}2$. При этих значениях a будет касание прямой $y = 3x + 14$ внутри полосы.

Ответ: $a = 2$, $a = -\frac{4}{3}$.

Пример 10[1]. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение. 1 способ. Введем новое неизвестное, положив $\frac{5}{x} - 3 = t$, тогда $x = \frac{5}{t + 3}$. Поскольку по условию задачи $x > 0$, то $t > -3$. После замены исходное уравнение примет вид $|t| = \frac{5}{t + 3} \cdot a - 2$. Выражаем a через t: $a = \frac{1}{5}(|t| + 2)(t + 3)$.

Пусть $-3 < t \leq 0$, тогда $a = \frac{1}{5}(2 - t)(t + 3) = \frac{1}{5}(-t^2 - t + 6)$. При $t \geq 0$ получаем $a = \frac{1}{5}(t^2 + 5t + 6)$.

В системе координат (t, a) строим график.

Из рисунка 20 видно, что прямая $y = a$ пересекает график в трех различных точках при $a \in (1{,}2; 1{,}25)$, а поэтому уравнение

[1] Задание уровня С5, предлагавшееся на ЕГЭ 2012 в Ставропольском крае.

$|t| = \frac{5}{t+3} \cdot a - 2$, а значит и исходное уравнение имеет три корня при найденных значениях a.

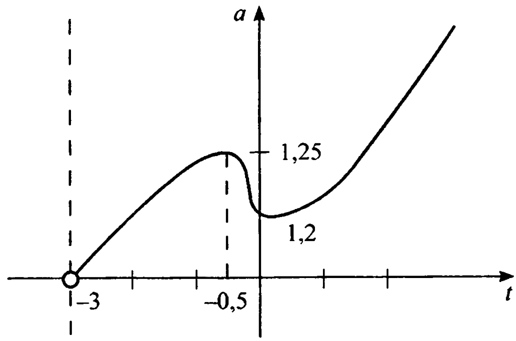


Рис. 20.

Ответ: (1,2; 1,25).

2 способ. По условию задачи $x > 0$. Выражаем a через x: $a = \frac{|5-3x|}{x^2} + \frac{2}{x}$. Так как $|-p| = |p|$, то $a = \frac{|3x-5|}{x^2} + \frac{2}{x}$. Строим график полученной функции.

Пусть $0 < x \leq \frac{5}{3}$, тогда $a = \frac{5-x}{x^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{5-x}{x^2}$, где $x > 0$.

$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x(5-x)}{x^4} = \frac{x^2 - 10x}{x^4} = \frac{x-10}{x^3}$. При $0 < x \leq \frac{5}{3}$ $f'(x) < 0$ и функция убывает на интервале $\left(0; \frac{5}{3}\right)$.

Пусть далее $x \geq \frac{5}{3}$, тогда $a = \frac{5x-5}{x^2}$.

Пусть $q(x) = \frac{5x-5}{x^2}$; $q'(x) = \frac{-5x^2+10x}{x^4} = \frac{-5(x-2)}{x^3}$.

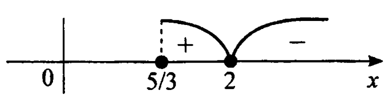


Рис. 21.

В точке $x = 2$ функция имеет максимум, равный 1,25. На отрезке $\left[\frac{5}{3}; 2\right]$ функция возрастает, а на промежутке $[2; +\infty)$ функция убывает. Строим график функции в системе (a, x).

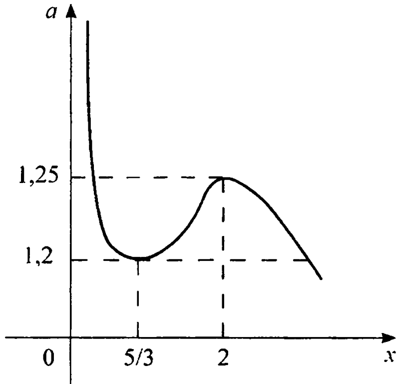


Рис. 22.

Из рисунка 22 видно, что прямая $y = a$ пересекает график функции в трех различных точках при $a \in (1{,}2; 1{,}25)$.

Ответ: $(1{,}2; 1{,}25)$.

3 способ. По условию $x > 0$, а так как $a = \frac{|3x - 5|}{x^2} + \frac{2}{x}$, то $a > 0$.

Исходное уравнение запишем в виде $ax^2 - 2x = |3x - 5|$.

Пусть $0 < x \le \frac{5}{3}$, тогда $ax^2 + x - 5 = 0$. (1)

Будем считать, что полученное уравнение при $a > 0$ имеет два корня, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{5}{3}\right]$.

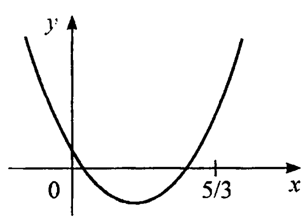


Рис. 23.

Из рисунка 23 видно, что для функции $f(x) = ax^2 + x - 5$ необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} D > 0, \\ f(0) > 0, \\ f\left(\frac{5}{3}\right) > 0. \end{cases}$

Пусть x_0 – абсцисса вершины параболы, где $0 < x_0 < \frac{5}{3}$.

Из второго неравенства системы имеем, что $-5 > 0$, что неверно, а значит, система не имеет решения.

Следовательно, уравнение (1) может иметь только один корень на промежутке $\left(0; \frac{5}{3}\right]$. Этот корень $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2a}$.

Легко видеть, что $\frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2a} > 0$. Покажем, что $\frac{-1 + \sqrt{1 + 2a}}{2a} \leq \frac{5}{3}$.

$-3 + 3\sqrt{1 + 2a} \leq 10a$; $3\sqrt{1 + 2a} \leq 10a + 3$.

После возведения обеих частей последнего неравенства в квадрат получаем ему равносильное неравенство: $9 + 18a \leq 100a^2 + 60a + 9$; $100a^2 + 42a \geq 0$, что очевидно при $a > 0$.

Теперь пусть $x \geq \frac{5}{3}$, тогда $ax^2 - 5x + 5 = 0$. (2)

Чтобы выполнялось условие задачи, уравнение (2) обязано иметь два корня, удовлетворяющие условию $x > \frac{5}{3}$.

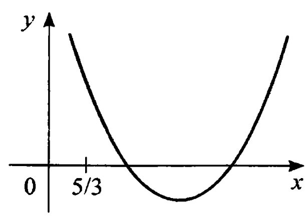


Рис. 24.

Для этого необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D > 0, \\ f\left(\frac{5}{3}\right) > 0, \\ x_0 > \frac{5}{3}; \end{cases}$ где $f(x) = ax^2 - 5x + 5$ (x_0 – абсцисса вершины параболы).

$D = 25 - 20a > 0,\ a < 1{,}25.$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9}a - \frac{25}{3} + 5 > 0,\ \frac{25}{9}a > \frac{10}{3},\ a > \frac{10}{3}\cdot\frac{9}{25} = 1{,}2.$

$x_0 = \frac{5}{2a} > \frac{5}{3},\ 2a < 3,\ a < 1{,}5.$

Легко видеть, что общее решение системы (1,2; 1,25).

Ответ: (1,2; 1,25).

4 способ. Так как $x > 0$, то исходное уравнение можно записать в виде $|3x - 5| + 2x = ax^2$. Строим графики $y = |3x - 5| + 2x$ и $y = ax^2$, где $a > 0$.

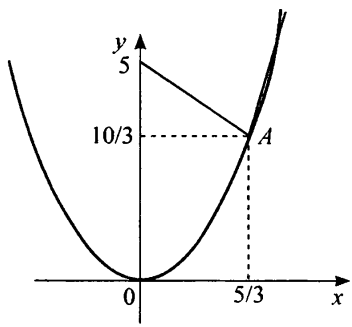


Рис. 25.

$y = |3x - 5| + 2x.$ $\begin{cases} 0 < x \le \frac{5}{3}, \\ y = -x + 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ y = 5x - 5. \end{cases}$

Чтобы уравнение $|3x - 5| + 2x = ax^2$ имело три корня, парабола должна пересечь и отрезок и луч. Значит, парабола проходит через точку $A\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$. $ax^2 - 5x + 5 = 0$, $D = 25 - 20a \ge 0$, $a \le \frac{5}{4} = 1{,}25$.

$y = |3x - 5| + 2x$, тогда $\frac{10}{3} = a\cdot\frac{25}{9}$; $a = \frac{10}{3}\cdot\frac{9}{25} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ – это наименьшее значение a.

Ответ: (1,2; 1,25).

5 способ. Ранее мы показали, что $a > 0$. При $x \ge \frac{2}{a}$ исходное уравнение равносильно уравнению $\left(\frac{5}{x} - 3\right)^2 - (ax - 2)^2 = 0$.

$\left(\frac{5}{x} - ax - 1\right)\left(\frac{5}{x} + ax - 5\right) = 0$, $(ax^2 + x - 5)(ax^2 - 5x + 5) = 0$, откуда $ax^2 + x - 5 = 0$ или $ax^2 - 5x + 5 = 0$.

Выясним, при каких значениях $a > 0$ последние уравнения имеют корни, удовлетворяющие неравенству $x \geq \frac{2}{a}$.

1. $ax^2 + x - 5 = 0$. Корни этого уравнения $x = \frac{-1 \pm \sqrt{25 + 20a}}{2a}$. Очевидно, что отрицательный корень не рассматривается, а для положительного корня получим неравенство $\frac{\sqrt{25 + 20a} - 1}{2a} \geq \frac{2}{a}$, $25 + 20a \geq 25$ и $a \geq 0$.

2. $ax^2 - 5x + 5 = 0$ имеет корни $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20a}}{2a}$; $\frac{5 + \sqrt{25 - 20a}}{2a} \geq$ $\geq \frac{2}{a}$, $\sqrt{25 - 20a} \geq -1$ – неравенство верно при $a \leq 1{,}25$.

Далее $\frac{5 - \sqrt{25 - 20a}}{2a} \geq \frac{2}{a}$, $\sqrt{25 - 20a} \leq 1$ – неравенство верно при $a \geq 1{,}2$. Объединяя полученные результаты, получим ответ.

Ответ: $(1{,}2;\ 1{,}25)$.

Замечания. Воспользуемся графической иллюстрацией к задаче.

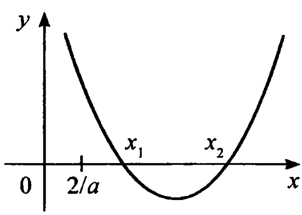


Рис. 26.

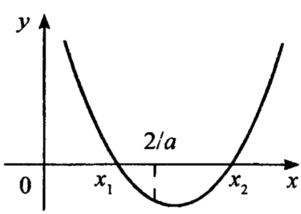


Рис. 27.

1. Выясним, может ли уравнение $ax^2 + x - 5 = 0$ иметь два корня, удовлетворяющих неравенству $x \geq \frac{2}{a}$.

Для функции $f(x) = ax^2 + x - 5$ имеем систему $\begin{cases} D > 0, \\ f\left(\frac{2}{a}\right) > 0, \\ x_0 > \frac{2}{a}; \end{cases}$ но последнее неравенство системы неверное, поскольку $-\frac{1}{2a} > \frac{2}{a}$ не выполняется при $a > 0$.

Следовательно, один корень должен быть больше $\frac{2}{a}$, а другой меньше $\frac{2}{a}$, а это возможно, если $f\left(\frac{2}{a}\right) \leq 0$, $\frac{6}{a} - 5 \leq 0$, $a \geq 1{,}2$.

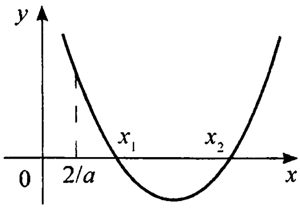


Рис. 28.

2. Определим, при каких значениях a уравнение $ax^2 - 5x + 5 = 0$ имеет два корня, больше, чем $\frac{2}{a}$.

Из рисунка 28 видно, что должна иметь решение система $\begin{cases} 25 - 20a > 0, \\ f\left(\frac{2}{a}\right) > 0, \\ \frac{5}{2a} > \frac{2}{a}. \end{cases}$

Получаем $1{,}2 < a < 1{,}25$, что удовлетворяет и рассуждениям для первого уравнения.

Ответ: $(1{,}2; 1{,}25)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

   Ответ: $0; \frac{25}{12}$.

2. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

   Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $1 \le |x| \le 3$ не меньше 6.

   Ответ: $[-6; 0]$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + (4a+5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$ имеет решение.

   Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -3\right]; \left[0; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

   Указание: Разложите левую часть неравенства на множители и изобразите в системе (x, a) ее решение. Второе уравнение системы задает круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 5.

5. При каких значениях a уравнение $(|x-2|-a-4)(a+6+x^2-4x)=0$ имеет ровно три различных корня?

   Ответ: $-4; -2$.

6. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$ имеет ровно три корня?

Ответ: $\frac{25}{6}$; 0; $\frac{25}{26}$.

7. При каком наибольшем значении параметра a система уравнений $\begin{cases}(x + 4)^2 + y^2 = a^2,\\ |x| + |y| = 4\end{cases}$ имеет одно решение?

Ответ: 64.

8. При каких значениях $a > 0$ неравенство $x^2 + ax - a^2 + 1 < 0$ выполняется для всех $x \le 1$?
Ответ: $(-1; 2)$.

9. Найдите все $a > 0$, при которых для любого числа из отрезка $[-3; 3]$ верно неравенство $|2x + a|x| - 13| \ge 1$.
Ответ: $a \in (0; 2]$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x - a| \ge a^2$ справедливо при любом значении x.
Ответ: $[-1; 1]$.

11. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно 3 корня?
Ответ: 2.

Указание: Если x_0 – корень данного уравнения, то $x_0 \ne \frac{1}{3}$. Убедитесь, что $x_1 = \frac{x_0 + 1}{3x_0 - 1}$ также является решением данного уравнения. Иными словами, верно равенство $|x_0| + \left|\frac{x_0 + 1}{3x_0 - 1}\right| = \left|\frac{x_1 + 1}{3x_1 - 1}\right| + x_1$. Чтобы уравнение имело 3 корня, необходимо, чтобы число решений было нечетным и одно из них было корнем уравнения $x = \frac{x+1}{3x-1}$, откуда $x = 1$ и $x = -\frac{1}{3}$. Этим значениям соответствуют $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. Далее следует проверка.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}x^2 + 2x - a \le 0,\\ x^2 - 4x + 6a \le 0\end{cases}$ имеет единственное решение.

Указание. В каждом из неравенств выразить a через x и построить графики парабол, полученных в правых частях.
Ответ: $a = -1$, $a = 0$.

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.
Ответ: $(-3{,}25; 3)$.

14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1 - 2x} = a - 5|x|$ имеет более двух корней.
Указание. Постройте график функции $f(a) = \sqrt{1 - 2x} + 5|x|$.
Ответ: $[2{,}5; 2{,}6)$.

15. Найдите все значения параметра a, при которых существует единственное x, удовлетворяющее условиям:
$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ (2x + 14a^2 - 7)(4x - 4a^2 - 15) \le 0. \end{cases}$$
Указание. Используйте графический метод в системе координат (a, x).
Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{14}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{1}{2}\right)$.

16[1]. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.
Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом их которых наименьшее значение функции $f(x) = ax + |x^2 - 4x + 3|$ больше 1.
Ответ: $(1; 4 + 2\sqrt{2})$.

18. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \ge 0$ выполняется при всех x?
Указание. Наименьшее значение функции, расположенной в левой части неравенства, достигается в точках излома, а также в графиках абсцисс вершин различных парабол, получающихся при раскрытии модуля, т.е. в точках $1; -1; 0; a$. Далее получаем систему неравенств: $\begin{cases} 4 - |1 - a| \ge 0, \\ 2 - |1 + a| \ge 0, \\ 2 - |a| \ge 0, \\ a^2 + 3 - |a - 1| \ge 0. \end{cases}$
Ответ: $[-2; 1]$.

[1] Задание из Демоверсии 2012 года.

19. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + x + |x - a| + \frac{2}{9} \le 0$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $-\frac{2}{3} \le a \le -\frac{1}{3}$.

20. При каких положительных значениях параметра a уравнение $|x^2 + ax - a^2| = 2a + 1$ имеет 4 корня?
Ответ: При $a > 2$.

21. При каких положительных значениях параметра a уравнение $|x - 2a| + |2x - a| = a + 2$ имеет один корень?
Ответ: 4.

22. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x| - a^2| = \frac{3x - a}{5}$ имеет три корня? Найдите эти корни.
Ответ: При $a = -\frac{2}{3}$ $x = -\frac{2}{9}; \frac{14}{117}; \frac{26}{63}$.
При $a = -\frac{1}{5}$ $x = -\frac{2}{65}; 0; \frac{2}{35}$.

23. При каких значениях параметра a уравнение $|2x + 3| = a|x - 1|$ имеет один корень?
Ответ: $a = 0$, $a = 2$.

24. Решите неравенство $|2x + a| < x + 2$.
Ответ: При $a > 4$ решений нет;
при $a = 4$ $x = -2$;
при $a < 4$ $x \in \left[-\frac{1}{3}(a + 2); 2 - a\right]$.

25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых график функции $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{|x|} - ax - 3a$ имеет на отрезке $[-1; 3]$ не менее двух общих точек с осью абсцисс.
Ответ: $a \in [2\sqrt{15} - 8; 0]$.

Задания уровня С6

Не существует определенных алгоритмов, которые позволяли бы научить решать задачи уровня С6. Для решения заданий уровня С6 необходимы общая высокая математическая культура, смекалка, навык решения сложных задач.

Пример 1. Можно ли привести пример пяти различных чисел, произведение которых равно 1008 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение: а) Пусть b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4 – пять различных натуральных чисел, образующих геометрическую прогрессию, тогда $b_1q^5 = 1008$, $(b_1q^2)^5 = 1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ – равенство невозможное, пример натуральных чисел привести нельзя.

б) Пусть b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, a – четыре числа, удовлетворяющих второму условию задачи, тогда $b_1^4 \cdot q^6 \cdot a = 1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$.

$(b_1^2 \cdot q^3)^2 \cdot a = 1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Естественно, здесь можно положить $a = 7$, тогда $(b_1^2 \cdot q^3)^2 = 2^4 \cdot 3^2$ и $b_1^2 \cdot q^3 = 2^2 \cdot 3$, но при натуральных значениях b_1 и q равенство невозможно. (Если $b_1^2 = 2^2$, тогда $q^3 = 3$ – невозможное равенство в натуральных числах.)

в) Пусть b_1, b_1q, b_1q^2, a, b – пять чисел, удовлетворяющих третьему условию задачи, тогда $b_1^3 \cdot q^3 \cdot a \cdot b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Здесь можно положить $b_1q = 2$ ($b_1 = 1$, $q = 2$), тогда в качестве a, b можно взять числа $2 \cdot 9 = 18$ и 7.

Ответ: 1; 2; 4; 7; 18.

Пример 2. При каких значениях x оба числа $\dfrac{x^2 + 4x - 1}{7x^2 - 6x - 5}$ и $\dfrac{1 - x}{1 + x}$ целые числа?

Решение: Пусть $\dfrac{1 - x}{1 + x} = n$, где n – целое число.

Выражаем x через n: $1 - x = n + nx$, $x(1 + n) = 1 - n$, $x = \dfrac{1 - n}{1 + n}$ (легко видеть, что $x \neq -1$).

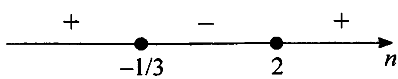
Заменим x в первой дроби:

$$\frac{\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2+4\cdot\frac{1-n}{1+n}-1}{7\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2-6\cdot\frac{1-n}{1+n}-5}=\frac{(1-n)^2+4(1-n^2)-(1+n)^2}{7(1-n)^2-6(1-n^2)-5(1+n)^2}=$$

$$=\frac{1-2n+n^2+4-4n^2-1-2n-n^2}{7-14n+7n^2-6+6n^2-5-10n-5n^2}=\frac{-4n^2-4n+4}{8n^2-24n-4}=$$

$$=\frac{-n^2-n+1}{2n^2-6n-1}.$$

Полученная дробь должна принимать целые значения, а это возможно, когда $-n^2-n+1\geq 2n^2-6n-1$, $3n^2-5n-2\leq 0$. Последнее неравенство решаем методом интервалов: $D=25+24=49$; $n=\frac{5\pm 7}{6}$; $n_1=-\frac{1}{3}$, $n_2=2$.



Возможные целые значения n: $n=0$; $n=1$; $n=2$.

При $n=0$, $\frac{-n^2-n+1}{2n^2-6n-1}=1$ – целое число, тогда $x=1$.

При $n=1$, $\frac{-n^2-n+1}{2n^2-6n-1}=-\frac{1}{5}$ – не целое число.

Находим x: $\frac{1-x}{1+x}=2$; $1-x=2+2x$; $x=-\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$, 1.

Пример 3. На доске записано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое больше какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появляется второе число, через две минуты – третье число и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске появиться число 2013?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске появится число 784?

Решение: а) Заметим, что каждое число будет делиться на 7. Действительно, исходное число делится на 7, в случае удвоения числа, делящегося на 7, получится число, делящееся на 7. А при сложении чисел, делящихся на 7, также получится число, делящееся на 7. Таким образом, все числа, записанные на доске, делятся на 7, а 2013 на 7 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Пример 7 + 14 (удвоенное число 7) + 14 (удвоенное число 7) + 14 (удвоенное число 7) + 14 (удвоенное число 7) = 63.

в) Первый случай сложения, то есть до этого были только удвоения. Таким образом, даже если в течение первых 7 минут сделано 6 удвоений и одно сложение (в некотором порядке), то наибольшее число, которое может получиться, равно $2^6 \cdot 1{,}5 = 96$, что меньше 112.

Итак, за 7 минут число 112 получить невозможно. Приведем пример, как его можно получить за 8 минут.

$1 \to 1{,}2.4 \to 1{,}2.4{,}8 \to 1{,}2.4{,}8.16 \to 1{,}2.4{,}8.16.32 \to$

$\to 1{,}2.4{,}8.16.32.64 \to 1{,}2.4{,}8.16.32.64.96\ (96 = 64 + 32) \to$

$\to 1{,}2.4{,}8.16.32.64.96.112\ (112 = 96 + 16)$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.

Пример 4. Каждое из чисел 1; –2; –3; 4; –5; 7; –8; 9; 10; –11 по одному записывается на карточках. Карточки переворачиваются и перемешиваются. На их чистых сторонах пишут по одному каждое из чисел: 1; –2; –3; 4; –5; 7; –8; 9; 10; –11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться число 0?

б) Может ли в результате получиться число 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может получиться в результате?

Решение: а) Среди данных десяти чисел нет противоположных. Сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Произведение не может обращаться в ноль.

б) Среди данных десяти чисел шесть нечетных. На какой-то карточке попадутся все нечетные числа, а их сумма – четное число, поэтому их произведение – число четное, а произведение не может равняться 1.

в) Итак, у нас шесть чисел нечетных, значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон записаны нечетные числа и сумма на этих карточках – число четное, значит произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получится при следующем расположении чисел: (1; 2); (–2; 1); (–3; 4); (4; –3); (–5; 7); (7; –5); (–8; 9); (9; –8); (10; –11); (–11; 10).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Пример 5. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $\overline{ab} = a^b + 23$.

Решение: Здесь a и b – цифры, причем $a \neq 0$.

Легко проверить, что $a \neq 1$, если $a = 1$, то $10 + b = 24$, $b = 14$ – не цифра.

Пусть $a = 2$, тогда получим уравнение $20 + b = 2^b + 23$, $b - 3 = 2^b$.

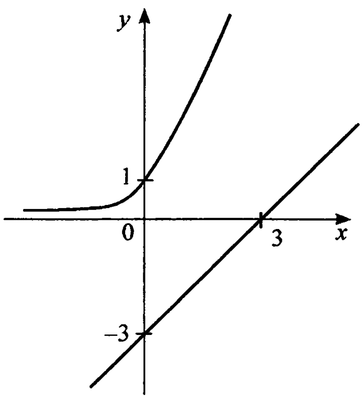


Рис. 1.

Из графика левой и правой части последнего равенства видно, что у уравнения $b - 3 = 2^b$ корней нет, то есть равенство невозможно.

При $a = 3$ имеем $30 + b = 3^b + 23$, $b = 3^b - 7$. Нетрудно увидеть, что $b = 2$ и пара (3; 2) удовлетворяет равенству.

При $a = 4$, $40 + b = 4^b + 23$, $b + 17 = 4^b$. График прямой $y = b + 17$ пересекает график функции $y = 4^b$ в двух точках, но среди корней уравнения $b + 17 = 4^b$ натуральных нет (взять $b = 1; 2; 3$).

При $a = 5$, $b = 5^b - 27$ – равенство невозможно среди натуральных значений.

Остальные случаи можно не рассматривать, так как значения правой части равенства растут быстрее, чем в левой.

Ответ: (3; 2).

Пример 6[1]**.** Дана числовая последовательность, каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов. Сложили n членов этой последовательности. Может ли полученная сумма быть числом четным, если второй член этой последовательности число четное, а предпоследний – нечетное число?

[1] Примеры 6 и 7 являются авторскими.

Решение: Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – данная последовательность. Согласно условию

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1, \\ a_4 &= a_3 + a_2, \\ &\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + a_{n-3}, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}. \end{aligned}$$

Сложив равенства, получим $a_n = a_2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2})$.

$2a_n + a_{n-1} = a_2 + S_n$. Отсюда видно, что S_n – нечетное, т.к. $2a_n$ и a_2 – четные числа, а a_{n-1} – нечетное число.

Ответ: нет.

Пример 7. Существует ли арифметическая прогрессия с натуральными членами, в которой отношение первого члена к разности также является натуральным числом, а шестой член, член с номером m и двадцатый член соответственно образуют геометрическую прогрессию?

Решение: Пусть a_1 – первый член прогрессии, d – ее разность. По условию $(a_1 + d(m-1))^2 = (a_1 + 5d)(a_1 + 19d)$, откуда $\frac{a_1}{d} = \frac{85-(m-1)^2}{2m-26} \in N$.

Решаем неравенство $\frac{85-(m-1)^2}{2m-26} > 0$ в натуральных числах.

Находим $m = 11, m = 12$.

При $m = 11$ $\frac{a_1}{d} = \frac{85-100}{22-26} = \frac{15}{4} \notin N$.

При $m = 12$ $\frac{a_1}{d} = \frac{85-121}{24-26} = \frac{36}{2} = 18 \in N$.

Однако

$$\begin{aligned} a_1 &= 18d, \\ a_6 &= 18d + 5d = 23d, \\ a_{12} &= 18d + 11d = 29d, \\ a_{20} &= 18d + 19d = 37d. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что a_6, a_{12}, a_{20} не образуют геометрическую прогрессию.

Ответ: нет.

Приложение
РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
(задания уровня С3 для самостоятельного решения до изучения темы «Логарифмы» в школьном курсе математики)

При выполнении диагностических работ по математике в 10 и 11 классах до изучения темы «Логарифмы» в качестве задания С3 предлагается решить дробно-рациональные неравенства.

Решите неравенства.

1. $\dfrac{x+2}{x^2-6x+8}-\dfrac{x-4}{x^2-4}\geq 0.$

   Ответ: $(-\infty; -2)\cup[1; 2)\cup(4; +\infty)$.

2. $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2+2x-3}\geq\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-1}.$

   Ответ: $(-\infty; -3)\cup(-1; 1)\cup\{3\}$.

3. $\sqrt{x+6}\cdot\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{9}{x^2-x-2}\right)\geq 0.$

   Ответ: $[-6; -4]\cup(-1; 2)\cup(2; +\infty)$.

4. $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+x-1}\geq 1-\dfrac{4x-8}{x^2-4}.$

   Ответ: $(-2; -1)\cup\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)\cup(2; 3]$.

5. $\dfrac{4}{x^2-6x+8}\leq\dfrac{3x^2-16x+20}{(x-2)^2(x-4)^2}.$

   Ответ: $(2; 4)\cup(4; 6]$.

6. $\sqrt{4-x}\leq\dfrac{\sqrt{x^3-6x^2+9x-4}}{\sqrt{x-1}}.$

   Ответ: 4.

7. $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}\leq\dfrac{x-3}{3\sqrt{x-1}}.$

   Ответ: $[5; +\infty)$.

8. $|x^3 - 3x^2 + 9x - 8| \le 9x - 8$.

Ответ: $[1; 3]$.

9. $$\left((\sqrt{3x-1})^2 - \frac{4}{x+1}\right)\left(2x + 1 - \frac{3}{x}\right) \le 0.$$

Ответ: 1.

10. $$\left(x - \frac{5}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+4}-1}{\sqrt{4-x}-1}\right)^2 \ge 4\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+4}-1}{\sqrt{4-x}-1}\right)^2.$$

Ответ: $[-1; 0)\cup\{1\}$.

Решите системы неравенств.

11. $$\begin{cases} (4x^2 - 4x + 1)(x - 2{,}5) \ge 0, \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{2-x} \le -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[2{,}5; 4]$.

12. $$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x-3} \le \sqrt{5}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} \le \dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Ответ: $[3; 4]\cup\{-1\}$.

13. $$\begin{cases} (x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x) - 3 \ge 0, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1]\cup\{1\}$.

14. $$\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2+2x} \le \dfrac{7}{12}, \\ \sqrt{x^2+7} \le 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2; -1-\sqrt{\frac{3}{7}}\right]\cup\left[-1+\sqrt{\frac{3}{7}}; 0\right]\cup[1; 3]\cup\{-3\}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Смоляков, А.Н.* Применение подстановок в логарифмических уравнениях и неравенствах / А.Н. Смоляков // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – 2006. – №5. – С. 25–28.
2. *Смоляков, А.Н.* Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля / А.Н. Смоляков // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – 2005. – №18. – С. 61–64.
3. *Смоляков, А.Н.* Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля / А.Н. Смоляков // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – 1994. – №42. – С. 4–5.
4. *Смоляков, А.Н.* О некоторых полезных логарифмических тождествах / А.Н. Смоляков // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – 1998. – №23. – С. 15–16.
5. *Смоляков, А.Н.* Решение неравенств методом интервалов / А.Н. Смоляков // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). – 1998. – №39. – С. 10–14.
6. *Севрюков, П.Ф.* Тригонометрические и логарифмические уравнения и неравенства / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М. : Илекса ; Ставрополь : Сервисшкола, 2010. – 396 с.
7. *Севрюков, П.Ф.* Школа решений задач с параметрами / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М. : Илекса ; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. – 212 с.
8. *Севрюков, П.Ф.* Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М. : Илекса ; НИИ школьных технологий ; Ставрополь : Сервисшкола, 2008. – 164 с.
9. Диагностические работы МИОО, 2012 г.

Содержание

Верстка – *Б. А. Ефремова.* Корректура – *Т. С. Шевченко.*

Подписано в печать 03.12.2012. Бумага офсетная.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8. Тираж 1000 экз. Заказ №89.

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-963000.

ИД №03253 код 221 от 15.11.2000 г.
Издательство «Илекса», г. Москва, ул. Буженинова, 30, стр. 4 (офис),
тел.: (495) 964-35-67, www.ilexa.ru, e-mail: real@ilexa.ru (отдел реализации). ilexa@nm.ru.

Отпечатано в типографии «Сервисшкола», 355011, г. Ставрополь, ул. 45-я Параллель, 36,
тел./факс: (8652) 57-47-27, 57-47-25, www.knigozona.ru, e-mail: s-school@mail.ru.